Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der Begriff des Spiels wird in unserer Gesellschaft in vielfacher Weise verwendet. Doch was steckt eigentlich aus mathematischer Sicht hinter diesem Begriff? Wie die Geschichte der Spieltheorie (Kapitel 2) zeigen wird, haben sich viele Mathematiker[1] von Spielen, in den Anfängen meist von Glücksspielen, faszinieren lassen und nach Möglichkeiten gesucht solche zu analysieren. Die Spieltheorie ist eine noch sehr junge mathematische Theorie, die in dieser Form erst seit den 1940er Jahren existiert. Die hier vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit theoretischen und praktischen Ausführungen über strategische Spiele und stellt eine Möglichkeit vor, Teilbereiche der Spieltheorie im schulischen Kontext anzuwenden. Ich habe den Bereich der strategischen Spiele gewählt, da sie nicht nur in Gesellschaftsspielsituationen auftreten, sondern vielfältige Anwendungsmöglichkeiten besitzen. Man unterscheidet hier, vergleiche dazu Kapitel 5.4, zwischen kooperativer und nichtkooperativer Spieltheorie. Ich habe mich auf den Bereich der nichtkooperativen Spieltheorie beschränkt, da es zum einen den Rahmen dieser Arbeit und zum anderen die Umsetzungsmöglichkeiten im schulischen Kontext, bezogen auf den zeitlichen Aspekt, überschreiten würde. Sicherlich wäre es in diesem Zusammenhang nicht uninteressant, die hier behandelten Spielsituationen und Aspekte unter dem Gesichtspunkt der kooperativen Spieltheorie zu behandeln und weiter zu vertiefen.

Nach einer zunächst allgemeinen Darstellung des Gegenstandes, der Geschichte und der Anwendungen der Wissenschaftsdisziplin *Spieltheorie* in Teil I folgen im zweiten Teil die theoretischen Grundlagen, die zur Behandlung strategischer Spiele in der nichtkooperativen Spieltheorie notwendig sind. Dies erfolgt in weiten Teilen nach Berninghaus (2006) und der jeweils angegebenen ergänzenden Literatur. Für zentrale Sätze werden ausschließlich Beweisskizzen gegeben, da die Theorie dieser Arbeit eine Vorbereitung der schulischen Anwendung ist. In einigen Fällen wird auch auf weiterführende Literatur verwiesen. Zu Beginn beschäftigt sich Teil II allgemein mit den grundlegenden Merkmalen strategischer Spiele. Außerdem werden in diesem Zusammenhang für den weiteren Verlauf wichtige Konzepte aufgegriffen und formal dargestellt. Die Anwendungen (Kapitel 4) machen deutlich, dass strategische Spiele im Wesentlichen in drei Kategorien, Fairness-, Dilemma- und Marktspiele, eingeteilt werden. In der umfassenden Theorie, die der schulischen Anwendung vorgeschoben ist, werden einzelne Dilemma- und Marktspiele zur Veranschaulichung einfacher Zusammenhänge verwendet. Schließlich werden in der schulischen Anwendung einige Beispiele wieder aufgegriffen. An dieser Stelle sei bereits angemerkt, dass die jeweiligen Auszahlungswerte in den Spielbäumen und Tabellen bzw. Matrizen stets

[1] Im Sinne einer Vereinfachung der Lesbarkeit dieser Arbeit wird mit guter Absicht bei Angaben von Personen auf die Erwähnung der weiblichen Form verzichtet und ausschließlich die männliche Form verwendet. Im Text sind daher beispielsweise mit Spielern beide Geschlechter gemeint.

willkürlich gewählt sind. Ebenso widerfährt es sich mit Namen von Personen und deren möglichen Handlungen in den einzelnen Beispielen.

Nach der allgemeinen Beschreibung der Elemente strategischer Spiele werden diese, angepasst an die Darstellungsformen Normalform (Kapitel 6.1) und Spielbaumdarstellung (Extensivform) (Kapitel 6.2), erneut aufgegriffen und entsprechend verfeinert. Da es prinzipiell möglich ist, die beiden Darstellungsformen Normal- und Extensivform ineinander überzuführen, gehe ich in Kapitel 6.3 auf die Übersetzungsproblematik ein und stelle im Anschluss eine weitere Darstellungsmöglichkeit, die Agentennormalform (Kapitel 6.4), vor. Kapitel 7 beschäftigt sich daraufhin mit den entsprechenden Lösungskonzepten. Hierzu werden auch praktisch durchführbare Lösungsverfahren im Hinblick auf die schulische Anwendung aufgeführt (Kapitel 7.4).

Teil III zeigt schließlich den Entwurf einer Unterrichtsreihe, die für mathematisch orientierte Projekttage oder Mathematik Arbeitsgemeinschaften der Jahrgangsstufen 10 bis 13 konzipiert ist. Nach einer kurzen Sachanalyse der benötigten Voraussetzungen und der Beschreibung der zugrunde gelegten Lerngruppe wird in der methodisch didaktischen Analyse (Kapitel 8.3) die Umsetzung dieses Entwurfes beschrieben. Die für das Gruppenpuzzle, eine Form der Gruppenarbeit, benötigten Arbeitsmaterialien (Kapitel 8.5) wurden auf der Grundlage der im zweiten Teil behandelten theoretischen Konzepte für die Schüler erstellt. Die sich anschließende Freiarbeitsphase wird gelenkt durch ausgewählte Aufgaben (Kapitel 8.6). Die entsprechenden Lösungen werden schließlich in Kapitel 8.7 zusammengestellt. Mit dem darauf folgenden Resümee (Kapitel 9) schließe ich meine Arbeit ab.

Der Anhang dieser Arbeit dient als Ergänzung der in Teil II verwendeten Sätze und Definitionen. Er soll als kleines Nachschlagewerk dienen, um einzelne Zusammenhänge zu verdeutlichen, die im eigentlichen Text als störend empfunden werden. Aus diesem einfachen Grund werden auch hier keine Beweise der zitierten Sätze angeführt. Des Weiteren werden diese auch in für spieltheoretische Zwecke benötigter Form möglichst einfach dargestellt.

Teil I

Allgemeines zur Spieltheorie

2 Gegenstand der Spieltheorie

Die Spieltheorie beschäftigt sich mit der Analyse von strategischen Entscheidungssituationen. Nach Güth (1992) besteht die allgemeine Aufgabe der Spieltheorie darin, für alle sozialen Konfliktsituationen eindeutig das individuell rationale Entscheidungsverhalten zu definieren. Eine soziale Konfliktsituation, die im weiteren Verlauf der Arbeit als Spiel[2] oder strategisches Spiel bezeichnet wird, beinhaltet stets, dass es mindestens zwei Agenten (Spieler) gibt, die möglicherweise unterschiedliche Interessen haben und sich außerdem autonom verhalten. Damit ist die Spieltheorie auch eine maßgebende Teildisziplin der Sozialwissenschaften und nicht eine ausschließlich mathematisch angewandte und ökonomische Theorie. Dabei beschränkt sich die Theorie nicht nur auf *Spiele* im engeren Sinne. Allerdings kommen die Merkmale in der Modellierung der Konflikte als spielähnliche Situationen besonders deutlich zum Tragen und erleichtern das Finden einer möglichen Lösung.

> Die Spieltheorie liefert eine Sprache, mit deren Hilfe sich solche Situationen analysieren lassen. Man kann sie nämlich als Spielsituationen beschreiben, bei denen jeder Spieler nach gewissen Regeln strategische Entscheidungen trifft. (Holler, 2006, S.1)

Holler (2006) verdeutlicht außerdem, dass eine Wechselbeziehung zwischen den Modellen und der Realität besteht. Auf der einen Seite stellt die Spieltheorie ihre modellhafte Sprache zur Verfügung, die zur Analyse der Interessens- und Koordinationsprobleme verwendet werden kann, und auf der anderen Seite hat insbesondere die Formulierung solcher Probleme einen wesentlichen Beitrag zur Weiterentwicklung und Verfeinerung spieltheoretischer Konzepte geleistet.

Güth (1992) bezeichnet diese Sprache als spieltheoretische Instrumente. Sie lassen sich unterteilen in Darstellungsformen strategischer Konflikte und Lösungskonzepte, die dazu dienen das individuell rationale Verhalten zu bestimmen. Die in seinen Augen irreführende Bezeichnung *Spieltheorie* ist historisch aus der wissenschaftlichen Untersuchung der Gesellschaftspiele entstanden. Hieraus hat sich das mannigfaltige und kaum noch überschaubare Gebiet der Spieltheorie entwickelt.

[2]Dieser und weitere Begriffe, die in diesem Teil angesprochen werden, werden in den folgenden Kapiteln präzisiert.

Die Spieltheorie untersucht deshalb Fragen, die die Interaktion betreffen. Dazu gehören beispielsweise die Möglichkeit der Beeinflussung durch Kommunikation oder die Reduzierung dieser. Weiterhin sucht man nach rationalem Verhalten in den Strategien[3] der Spieler und selbstverständlich nach optimalen Ergebnissen.

(Güth, 1992, S.1ff. / Holler, 2006, S.1 / http://www.tobiasthelen.de/ipd)

3 Geschichte der Spieltheorie

Die Spieltheorie gehört zu den jüngsten Gegenstandsbereichen der Mathematik. Ihre Etablierung als allgemein anerkannte wissenschaftliche mathematische Theorie fällt mit dem Erscheinen eines einzigen Buches im Jahre 1944 zusammen. Dabei handelt es sich um das Werk von John von Neumann[4] und Oskar Morgenstern[5]. Berninghaus (2006) ergänzt in diesem Zusammenhang, dass dies eines der wenigen Lehrbücher ist, die Originalmaterial enthalten und keine Niederschrift bereits lang diskutierter Ergebnisse ist. Er fügt hinzu, dass spieltheoretische Forschung in den Jahren zuvor damit nicht ausgeschlossen ist und verweist auf die Arbeiten von Zermelo und von Neumann. Sie haben bereits einige grundlegende der später erzielten Ergebnisse vorweg genommen.

Doch bereits zuvor gab es weniger ausgearbeitete Ansätze, beispielsweise die Anweisung über die Aufteilung des Vermögens eines verstorbenen Mannes an seine Frauen im babylonischen Talmund. Eingeordnet wird diese Schrift von Walker (2005) zwischen 0 und 500 n. Chr. Außerdem versuchte man, Spiele, meist Gesellschaftsspiele, im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung mathematisch zu analysieren, da die Ungewissheit des Spielausgangs und ihre Ursachen stets einen großen Anreiz boten.

Nach Worobjow (1975) lassen sich diese Spiele nach Ursachen der Ungewissheit in drei Gruppen einteilen: kombinatorische Spiele, Glücksspiele und strategische Spiele. Bei den kombinatorischen Spielen können die Spielregeln eine Vielfalt von Partien zulassen, so dass eine sichere Voraussage über den Ausgang einer einzelnen Partie, angenommen es handelt sich um gleich gute Spieler, praktisch zunächst fast unmöglich ist. Die stetige und fortschreitende Analyse nimmt jedoch dem kombinatorischen Spiel die Komplexität und auch den Wettkampfcharakter. Im Falle vollständig formalisierbarer kombinatorischer Spiele wie zum Beispiel der bekannten Spiele vom

[3]planvolles Anstreben einer vorteilhaften Lage oder eines Ziels

[4]Der Mathematiker John von Neumann (1903 in Budapest geboren, 1957 in Washington D.C. verstorben) wirkte nach seinem Studium der chemischen Verfahrenswissenschaften (Zürich) und der Mathematik (Budapest) als Privatdozent in Göttingen, Berlin und Hamburg, und ab 1933 als Professor am Institute for Advanced Studies in Princeton.

[5]Oskar Morgenstern (1902 in Görlitz geboren, 1977 in Princeton verstorben) lehrte bis 1938 als Professor der Nationalökonomie in Wien und anschließend an den Universitäten Princeton (bis 1970) und New York.

Typ *Nim*, bei denen die Spieler abwechselnd bestimmte Gegenstände von einem Haufen wegnehmen, reduziert sich die Ermittlung der Gewinnkombination, vorausgesetzt sie existiert, auf die Lösung nicht allzu komplizierter logischer Aufgaben. Bei komplizierteren Spielen führen die rein logischen Prinzipien leider nicht zu einer erschöpfenden Analyse des Spiels, aber dennoch zu einigen allgemeinen Aussagen. Der Schwerpunkt der Spielkunst verlagert sich somit darauf, eine Vielzahl von Varianten analysieren, abschätzen und vergleichen zu können.

Der Einfluss zufälliger Faktoren spielt in der Gruppe der Glücksspiele eine entscheidende Rolle. Der Ausgang dieser Spiele ist ausschließlich aufgrund zufälliger Ursachen ungewiss. Typische Beispiele sind verschiedene Würfel- und Münzwurfspiele. Auch das bekannte Roulette ist ein reines Glücksspiel. Worobjow (1975) merkt an dieser Stelle an, dass man nicht von einem optimalen Verhalten eines Spielers bei dieser Art von Spielen sprechen kann, da der Spielausgang nicht von seinem Handeln abhängt. Er kann lediglich entscheiden, ob es für ihn persönlich Sinn macht an diesem Spiel mit seinen spezifischen Regeln teilzunehmen.

Die Ungewissheit des Spielausganges in der Gruppe der strategischen Spiele besteht darin, dass ein Spieler im allgemeinen nicht weiß, wie sich die anderen Spielteilnehmer verhalten werden. Im Gegensatz zu den beiden vorhergehenden Ursachen der Ungewissheit ist diese spieltheoretischer Natur, da sie von den anderen Teilnehmern abhängt. Die Teilnehmer können sowohl real als auch fiktiv sein. Unter realen Spielern versteht man einen Menschen oder ein Kollektiv. Die fiktiven Gegenspieler können dagegen die Natur oder vorliegende Umstände sein.

Der strategische Aspekt kann in Verbindung mit dem kombinatorischen auftreten, beispielsweise im Spiel Seeschlacht, einer Schachvariante. Außerdem ist sowohl eine Kopplung mit dem Glücksspiel, zum Beispiel beim Poker, als auch eine gleichzeitige Kopplung mit Glücksspiel und kombinatorischem Anteil möglich, wie das Kartenspiel Préférence zeigt.

Diese drei Gruppen wurden oftmals unabhängig voneinander untersucht. Glücksspiele boten stets einen Anreiz zur Analyse. Dubins und Savage haben nach Worobjow (1975) die allgemeinste Form der Theorie der Glücksspiele veröffentlicht. Von viel größerem Interesse sind jedoch die Spiele, die nicht nur durch Zufall bestimmt werden, sondern wenn auch oder nur die Spieler über Ablauf und Ausgang des Spiels entscheiden. Aus diesem Grund werde ich den geschichtlichen Zweig der Glücksspiele nicht weiter verfolgen und mich der Entwicklung der kombinatorischen und strategischen Spiele zuwenden.

Worobjow (1975) vermutet, dass ein kombinatorisches Spiel erstmalig in Form einer mathematischen Aufgabe zu Beginn des 17. Jahrhunderts beschrieben wird.

> Die bekannte Sammlung mathematischer Unterhaltungen von BACHET DE MÉZIRIAC, die im Jahre 1612 erschien [...], enthält eine Aufgabe folgenden Inhalts: Zwei Spieler nennen abwechselnd Zahlen zwischen 1 und 10 und jeweils die Summe aller genannten Zahlen. Wer zuerst 100 erreicht hat, hat gewonnen. (Worobjow, 1975, S.14)

Bouton veröffentlichte 1902 eine vollständige Theorie über das Fan-Tan Spiel, einem Spezialfall der Nimspiele, die 1909 von Moore analysiert wurden[6]. Bei kombinatorisch komplexeren Spielen, wie beispielsweise Schach, verlagert sich die Analyse von der Angabe der Mengen der Gewinnpositionen auf den Beweis der Existenz solcher Mengen. Diese Aufgabe verfolgte Zermelo und publizierte 1913 „Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels“. Diese Veröffentlichung enthält das erste Theorem der Spieltheorie. Ergänzt wurde die Arbeit von König und Kalmár in den Jahren 1927 bzw. 1928.

Die Analyse des strategischen Aspekts bildete sich bereits Anfang des 18. Jahrhunderts heraus und wurde immer wieder aufgegriffen und erweitert. Insbesondere Borel hatte in diesem Zusammenhang viele Ideen, die er allerdings nicht alle bis zum Ende verfolgte. Von Neumann bewies 1928 das Minimaxtheorem in seinem Artikel „Zur Theorie der Gesellschaftsspiele“. Dabei gelang es ihm den Begriff des Spiels so allgemein zu definieren, dass damit ökonomische Modelle beschrieben werden konnten. Damit zeichnete sich die fortschreitende Entwicklung einer zu diesem Zeitpunkt neuen mathematischen Disziplin ab.

(Worobjow, 1975, S.11ff.)

Die bisherigen spieltheoretischen Analysen waren allerdings lediglich Ergebnisse spezifischer Fragestellungen. Eine allgemeinere Theorie zur Analyse strategischen Verhaltens war bis dahin noch nicht entwickelt worden.

John von Neumann und Oskar Morgenstern zeigten schließlich in ihrer 1944 erschienenen Monographie „Theory of Games and Economic Behavior“, dass die Vorgänge strategischer Spiele ökonomischen Prozessen entsprechen. Sie lassen sich demnach zur Analyse dieser Prozesse verwenden.

Hier werden Spiele erstmalig mathematisch, in Form einer systematischen Theorie, untersucht. Dieses Werk schuf faktisch aus dem Nichts heraus eine umfassende,

[6]Moore gab alle möglichen Gewinnpositionen an und zeigte, dass sich in den Nimspielen eine Klasse von Positionen angeben lässt, die eine zweifache Stabilität, eine innere und eine äußere zugleich, besitzen.

bedeutende und vollkommen nicht traditionelle mathematische Disziplin. Der Titel verdeutlicht bereits das Ziel der Verfasser. Sie wollten mit der mathematischen Spieltheorie ein Modell entwickeln, mit dessen Hilfe in der Ökonomie vorkommende Probleme formalisiert, analysiert und anschließend gelöst werden können. Berninghaus (2006) beschreibt den Verlauf der Weiterentwicklung und des Interesses nach dem Erscheinen der Monographie als zyklisch. In der ersten Phase nahm das Interesse bis in die 1950er Jahre stark zu und es wurde „theoretische Pionierarbeit geleistet" (Berninghaus, 2006, S.3). Dabei fand eine rasante Entwicklung statt. 1950 führten Dresher und Flood von der RAND Corporation ein Experiment durch, das heute als das Gefangenendilemma bekannt ist. Dieser Begriff wurde von Tucker und Raiffa geprägt.

Zwischen 1950 und 1953 veröffentlichte John F. Nash[7] vier Artikel in denen er einen Zustand strategischen Gleichgewichts beschreibt, das sogenannte Nash-Gleichgewicht. Von diesem Zustand ausgehend hat kein einzelner Spieler ein Interesse daran, seine Strategie zu ändern, da er für sich allein keinen Vorteil erzielen kann. Das Nash Gleichgewicht ist ein grundlegendes Lösungskonzept der Spieltheorie, auf das ich in den Kapiteln 7.1.3 und 7.2.1 vertieft eingehen werde.

Die ökonomischen Anwendungen spieltheoretischer Lösungskonzepte bezogen sich damals hauptsächlich auf Fragestellungen des unvollständigen Wettbewerbs. Allerdings war die Euphorie der unendlichen Möglichkeiten, die die Spieltheorie zu bieten schien, schnell wieder verschwunden.

> Ein Grund für diese Entwicklung war nicht zuletzt die Enttäuschung darüber, dass man die theoretisch befriedigenden Ergebnisse über Nullsummen-Spiele nicht problemlos auf allgemeinere Spiele übertragen konnte.
>
> (Berninghaus, 2006, S.4)

Dies liegt daran, dass Nullsummen-Spiele für die meisten Anwendungen zu speziell sind. Sie sind eher für die Anwendung auf Gesellschaftsspiele, in denen sich Gewinn und Verlust der Spielparteien auf Null summieren, geeignet. In ökonomischen Spielen treten solche Situationen allerdings selten auf.

Zu Beginn der sechziger Jahre des letzten Jahrhunderts begann eine zweite Blütezeit dieser Wissenschaft. Hier stand die Weiterentwicklung der kooperativen Spieltheorie im Mittelpunkt. Man entwickelte Lösungskonzepte, die durch gemeinsames Handeln der Spieler faire Aufteilungen oder Auszahlungen beschreiben sollten.

[7] Der Mathematiker John Forbes Nash jr. (1928 in Bluefiel geboren) arbeitete insbesondere im Bereich der Spieltheorie und Differentialgeometrie. Im Alter von 30 Jahren erkrankte er an Schizophrenie. 1994 bekam er zusammen mit Reinhard Selten und John Harsanyi den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften.

Reinhard Selten publizierte 1965 sein Buch „Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit“. Er stellte eine Verfeinerung des Nash-Gleichgewichtes vor und gab in diesem Zusammenhang der Anwendung der Spieltheorie in den Wirtschaftswissenschaften neue Impulse. Einen weiteren Eckpunkt bildet die Arbeit von Harsanyi (1966) „A General Theory of Rational Behavior in Game Situations“ dar. Er stellt hier die heute meist verwendete Definition vor, die die kooperativen von den nichtkooperativen Spielen unterscheidet und im Folgenden Grundlage dieser Arbeit ist.

Mitte der siebziger Jahre ließ das Interesse an der Spieltheorie zunächst erneut nach. Die folgenden Entwicklungsphasen verliefen nicht mehr eindeutig, da sich einige überlagerten. Berninghaus (2006) unterteilt daher die bis in die Gegenwart reichende dritte Phase in zwei Teilphasen, die beide eng mit den Arbeiten von Reinhard Selten verbunden sind. In der ersten Teilphase nahm das Interesse an so genannten Extensivformspielen zu, das unter anderem auf Seltens Lösungskonzepte (teilspielperfektes Gleichgewicht) aus den sechziger Jahren zurückzuführen war. Extensivformspiele sind unter anderem durch viele explizit modellierte Einzelheiten des Spiels charakterisiert. Er schreibt dieser Entwicklungsphase als Anwendung spieltheoretischer Konzepte eine beispiellose Weiterentwicklung der theoretischen Industrieökonomik zu.

Die dazu parallel verlaufende zweite Phase beschäftigte sich mit einer anderen Forschungsrichtung. Ausgehend vom Interesse, spieltheoretische Erklärungsansätze biologischer Phänomene, beispielsweise Partnersuche und Revierkämpfe in Tierpopulationen, zu finden, entstand schließlich in den achtziger Jahren die Evolutionäre Spieltheorie. In diesem Zusammenhang wurde das Konzept der individuellen Rationalität überarbeitet und ein neues Konzept, das des Lernens und der beschränkten Rationalität, entstand.

1994 erhielten John Nash, Reinhard Selten und John Harsanyi letztlich für ihre gemeinsame Arbeit im Bereich der Spieltheorie den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften „for their pioneering analysis of equilibria in the theory of noncooperative games“. (Walker, 2005)

Ein weiterer Nobelpreis im Bereich der Wirtschaftswissenschaften wurde 2005 an Robert J. Aumann und Thomas C. Schelling für ihre spieltheoretischen Beiträge über Konflikt und Kooperation in wiederholten Interaktionen verliehen.

(Berninghaus, 2006, S.1ff. / Schwalbe, 2001 / Worobjow, 1975, S.9ff. /
http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics /
http://science.org.at/science/news/142566)

4 Anwendungen der Spieltheorie

Wie bereits angedeutet ist die Spieltheorie eine Forschungsrichtung, die sich nicht ausschließlich mit mathematischer Theorie befasst. Sie ist eine dem Operations Research und der Volkswirtschaftlehre zugeordnete mathematische Theorie, die sich mit der Beschreibung strategischer Spiele befasst. Die möglichen Anwendungen sind sehr breit gestreut. Der wichtigste Bereich sind die Wirtschaftswissenschaften, die die Spieltheorie zur Analyse des Marktes und der Marktsituationen verwenden. Auch die spieltheoretische Analyse von Verhandlungen ist diesem Bereich zuzuordnen. Des Weiteren dient sie, wie in Kapitel 3 bereits erwähnt, in der evolutionären Spieltheorie der Biologie zur Untersuchung evolutorischer Phänomene. In der Politologie und Soziologie sind, wie in den Wirtschaftswissenschaften, Koalitionen, Machtkämpfe und Verhandlungen ebenfalls Gegenstand der Forschung. In der Anwendung der Spieltheorie unterscheidet man drei Arten von Spielen. Die erste Kategorie umfasst die Fairness-Spiele. Man untersucht hier beispielsweise mit dem so genannten Diktatorspiel[8] altruistisches Verhalten der Spieler. Die zweite Kategorie umfasst die Dilemma-Spiele. Hier ist das Gefangenendilemma, das im weiteren Verlauf mehrmals aufgegriffen wird, das wohl bekannteste in der spieltheoretischen Literatur. Die dritte Kategorie bilden die Markt-Spiele. In diesen Spielen werden Markt-Situationen simuliert. Diese Art findet fast ausschließlich in den Wirtschaftswissenschaften Anwendung.

(http://www.mathematik.de/spudema/spudema_beitraege/kuhlenschmidt/extensivform.htm)

[8]Ein als Diktator bestimmter Spieler besitzt die Möglichkeit, zwischen sich und seinem Mitspieler, eine festgelegte Geldsumme aufzuteilen. Dabei muss er nicht zwingend Rücksicht auf seinen Mitspieler nehmen.

Teil II

Theoretische Grundlagen der Spieltheorie

5 Strategische Spiele

Der Begriff *Spiel* wird nach Rauhut (1979) in der Umgangssprache in vielfältigen Bedeutungszusammenhängen verwendet. Für die mathematische Analyse beschränke ich mich in dieser Arbeit allerdings auf solche, deren Regeln sich präzisieren lassen.

Definition 5.1. Ein **Spiel** ist gekennzeichnet durch die Gesamtheit der Spielregeln.

Da nach geschickten Verhaltensweisen der Spieler, beispielsweise in Konfliktsituationen, gesucht wird, wird, wie in Kapitel 2 bereits angedeutet, der Begriff der strategischen Spiele verwendet.

Definition 5.2. Unter einem **strategischen Spiel** versteht man ein Spiel, bei dem die Spieler Einfluss auf das Ergebnis des Spiels nehmen können. Eine einzelne Realisierung eines Spiels heißt **Partie**. Die einzelnen Entscheidungen der Spieler im Verlauf einer Partie heißen **Züge**.

Nach Vorobjoff (1972) umfasst jedes Spiel drei Elemente. Dies sind zum einen die Teilnehmer bzw. die Spieler, ihre durch die Spielregeln zugelassenen Verhaltensweisen und ihre Interessen. Er fügt hinzu, dass eine exakte mathematische Problemstellung eine exakte Beschreibung dieser Elemente voraussetzt.

Es erfolgt nun zunächst eine kurze und allgemeine Darstellung der bei strategischen Spielen vorliegenden Situation, um sie in den folgenden Kapiteln einer mathematischen Behandlung zugänglich zu machen.

(Rauhut, 1979, S.9ff. / Vorobjoff, 1972, S.13ff.)

5.1 Menge der Spieler N

In dieser Arbeit gehe man stets davon aus, dass am Spiel eine endliche Anzahl von Spielern teilnimmt. Jeder dieser Spieler i ist ein Element der Spielermenge N={1;2;...;n}. In der Regel bezeichnet man als Spieler einzelne Individuen, Entscheider bzw. Agenten. Ein Spieler kann aber ebenso aus einer Gruppe von Individuen bestehen, wenn sich die Gruppe wie ein einzelnes Individuum verhält. Dies bedeutet, dass sie eine Präferenzordnung besitzt und die Entscheidungsprozesse innerhalb der Gruppe nicht von Interesse sind. Für viele strategische Entscheidungssituationen ist es nämlich nicht trivial festzustellen , wer ein Spieler in einem Spiel ist.

(Holler, 2006, S.31f.)

5.2 Strategien

Der Begriff der Strategie ist ein Grundbegriff der Spieltheorie. Eine Strategie ist eine vollständige Beschreibung, wie man sich in jedem möglichen Fall verhalten wird und im spieltheoretischen Sinne ein vollständiger und im voraus gefasster Verhaltensplan.

Definition 5.3. Strategien sind in der Spieltheorie alle möglichen Verhaltensweisen oder Aktionen eines Spielers i, mit i = 1,...,n. Sie werden in einer Strategienmenge zusammengefasst, die nicht leer ist.

Ich beschränke mich in dieser Arbeit auf eine endliche Menge von Strategien, da die Formulierung allgemeiner Konzepte unendlicher Strategienmengen weitere formale mathematische Konzepte benötigt, die zum einen im Hinblick auf schulrelevante Anwendungen nicht vorkommen und zum anderen den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würden. Der Begriff der Strategie lässt sich weiter in reine und gemischte Strategien eines Spielers i differenzieren. Gemischte Strategien sind Wahrscheinlichkeitsverteilungen über der Menge der reinen Strategien. In den Kapiteln 6.1 und 6.2 werden die Begriffe jeweils bezüglich ihrer Darstellungsform aufgegriffen und für die konkrete Situation definiert. In vielen Fällen ist es sehr interessant die Änderung der Strategie eines Spielers i unter Kenntnis aller Strategien der restlichen Spieler zu untersuchen. Ein Spieler kann während eines Spiels zwischen einer endlichen Anzahl alternativer Strategien wählen, wenn das Spiel mehrere Entscheidungen von ihm verlangt. In diesem Fall führt er im Verlauf des Spiels mehrere Züge aus. Ich gehe in dieser Arbeit davon aus, dass ein Spieler für alle möglichen Situationen Pläne entwirft und Strategien besitzt, die ihn zu verschiedenen Spielzügen befähigen. In den meisten Beispielen ist die Strategienmenge endlich und diskret. In vielen ökonomischen Situationen stellt es sich jedoch als vorteilhafter heraus, sie als eine kontinuierliche Menge zu betrachten, denn bei vollkommener Teilbarkeit kann beispielsweise ein Unternehmen jede beliebige Menge zwischen der minimalen und maximalen Ausbringung als Strategie wählen. Im weiteren Verlauf, falls nicht anders vermerkt, sei die Strategienmenge jedes Spielers kompakt und konvex[9].

(Berninghaus, 2006, S.11ff., S.95f. / Holler, 2006, S.33ff. /Vorobjoff, 1972, S.15ff.)

[9] siehe Anhang A1

5.3 Gewinnfunktion

Zur vollständigen Beschreibung eines strategischen Spiels gehört auch die Auswertung der möglichen Ausgänge der Partie. Nach Vorobjoff (1972) wird daher jeder Spielsituation eine eindeutige Maßgröße für den Nutzen, entweder Gewinn oder Verlust, zugeordnet. Da dieser Nutzen mit der betreffenden Spielsituation in einem funktionalen Zusammenhang steht, wurde in der Spieltheorie dafür der Ausdruck Gewinnfunktion[10] oder Auszahlungsfunktion eines einzelnen Spielers geprägt. Auch die Gewinnfunktion wird in den Kapiteln 6.1 und 6.2 jeweils bezüglich ihrer Darstellungsform aufgegriffen und für die konkrete Situation definiert. Allgemein formuliert ordnet jeder Spieler jedem Spielausgang in Abhängigkeit seiner gewählten Strategie einen bestimmten Gewinn zu. Dabei handelt es sich um eine Funktion von der vorliegenden Strategienmenge in die reellen Zahlen. Nach Berninghaus (2006) genügt es, die Eigenschaften der Gewinnfunktion zu postulieren. Diese Eigenschaften belaufen sich auf Stetigkeit und Konkavität bzw. dem Spezialfall der Linearität.

Die Gewinnfunktion lässt sich durch verschiedene Einheiten ausdrücken. In ökonomischen Fragestellungen verwendet man oftmals Geldeinheiten. Vorobjoff (1972) bemerkt in diesem Zusammenhang, dass es nicht ausgeschlossen ist in einem Spiel die Gewinne der einzelnen Spieler in unterschiedlichen Einheiten zu messen. Dies erschwert allerdings die Analyse eines Spiels. Deshalb werde ich mich im weiteren Verlauf auf die Fälle beschränken, in denen der Gewinn eines Spielers in jeder Spielsituation in einer einzigen Einheit dargestellt wird. Im Allgemeinen interpretiert man die Auszahlung oder Gewinn als kardinalen Nutzen des Spielergebnisses für einen Spieler. Bei der Analyse konkreter Beispiele wird in dieser Arbeit die Interpretation der Gewinnfunktion stets pragmatisch aus der Problemstellung erschlossen.

(Berninghaus, 2006, S.11f. / Güth, 1992, S.42f. / Vorobjoff, 1972, S.17f.)

5.4 Kooperative und nichtkooperative Spieltheorie

In der Spieltheorie unterscheidet man zwischen den zwei Teilgebieten der kooperativen und nichtkooperativen Theorie. Die kooperative Spieltheorie untersucht Situationen, in denen die Kooperation der Spieler untereinander vorausgesetzt wird und sie bindende Vereinbarungen treffen. Die Einhaltung der Absprachen und selbstverständlich auch der Spielregeln ist somit von außen vorgegeben. Im Gegensatz dazu beschäftigt sich die nichtkooperative Spieltheorie mit Situationen, in denen die Spieler untereinander keine bindenden Verträge oder Vereinbarungen treffen können.

> Während ein Vertrag in der kooperativen Theorie auf jeden Fall eingehalten wird, können sich die Spieler in der nichtkooperativen Theorie

[10] Gewinn wird hier und im Folgenden im Sinne von Nutzen verstanden

> entscheiden, ob sie ihn einhalten oder nicht. (Rieck, 2006, S.35)

Die Möglichkeit, bindende Verträge eingehen zu können, die eine Kommunikation der Spieler untereinander einschließt, ist eine Spielregel. Diese hat erheblichen Einfluss auf das Ergebnis und ist daher ein wesentliches Merkmal. Das charakterisierende Merkmal der nichtkooperativen Spieltheorie ist die explizite Aufführung aller relevanten Möglichkeiten der Spieler. Rieck (2006) stellt heraus, dass die Unterscheidung in kooperative und nichtkooperative Spieltheorie an dieser Stelle allerdings willkürlich erscheint.

> Es gibt einige weitere spielexogene Rahmenbedingungen, die ebenfalls dramatische Änderungen in der Analyse von Spielen ergeben und anhand derer man daher die Spieltheorie hätte unterscheiden können. (Rieck, 2006, S.37)

Die verwirrenden Begrifflichkeiten sind historischen Ursprungs. Beide Theorien sind heute selbstständig definiert.

> Dass gerade die Unterscheidung in kooperativ/nichtkooperativ so herausgestellt wird, ist wohl in erster Linie historisch zu begründen, da gerade für die kooperativen Rahmenbedingungen - besonders in den Anfängen der Spieltheorie - viele wichtige Ergebnisse ermittelt wurden. (Rieck, 2006, S.37)

Rieck (2006) merkt des Weiteren in diesem Zusammenhang an, dass die Bezeichnung explizierende Spieltheorie besser geeignet wäre, sich die verwirrende Bezeichnung nichtkooperativ allerdings nicht mehr ausrotten lasse.

Kooperative und nichtkooperative Spieltheorie stellen unterschiedliche Interessensschwerpunkte in den Mittelpunkt ihrer Untersuchungen. Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem allgemeineren, dem nichtkooperativen Fall, da ein realer Sachverhalt fast vollständig abgebildet wird. Handlungen, die in der kooperativen Theorie lediglich vorausgesetzt werden, ergeben sich im nichtkooperativen Fall stets als Ergebnis von Entscheidungen.

Allerdings kann die Verkürzung auf die kooperative Situation in manchen Fällen sehr hilfreich sein, da sich zahlreiche einfache kooperative Situationen praktisch gesehen nicht in eine nichtkooperative Situation umwandeln lassen.

(Rieck, 2006, S.34ff.)

Das Hauptanliegen der nichtkooperativen Spieltheorie ist die Untersuchung sozialer Interaktion in unseren Gesellschaftsstrukturen. Sie ist für die meisten Anwendungen in der Ökonomie und Wirtschaft von Interesse. Weiterhin würde die ausführliche Behandlung beider Theorieansätze den über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen.

Ein nichtkooperatives Spiel definiert man allgemein wie folgt.

Definition 5.4. Ein Spiel mit endlicher Spielermenge N und (hier endlicher) Strategienmenge, sowie Gewinnfunktionen für die einzelnen Spieler, wird **nichtkooperatives Spiel** genannt.

Auch diese Definition wird in den Kapiteln 6.1 und 6.2 aufgegriffen und bezüglich der unterschiedlichen Darstellungsformen verfeinert.

5.5 Informationen

Ganz entscheidend für die Beschreibung eines Spiels sind die Angaben darüber, welche Informationen die Spieler zu ihren jeweiligen Entscheidungszeitpunkten besitzen. In den meisten Fällen bestimmt der Informationsstand der Spieler über die verfügbaren Strategien. Dieser wird durch den Strategienraum, das kartesische Produkt der Strategienmengen der Spieler i (i = 1,...,n), angegeben . Insbesondere die Darstellung der extensiven Spielform, die durch eine detaillierte Angabe der Spielweise charakterisiert ist und in Kapitel 6.2 näher betrachtet wird, ermöglicht es, den Zusammenhang von Strategie und Information zu veranschaulichen. Oftmals wird aber die Information davon unabhängig formuliert, um die Strategien möglichst einfach gestalten zu können. Die folgenden Informationsannahmen können üblicherweise in Spielsituationen auftreten.

5.5.1 Perfektes Erinnerungsvermögen (Perfect Recall)

Während eines Spielverlaufes erhalten die Spieler immer neue Informationen über die Handlungen der Mitspieler und zum Teil über den Verlauf des Zufalls. Gesetz des Falles, dass ein Spieler frühere Informationen nicht vergisst, wird sein Informationsstand immer genauer und die Informationen des Spielers werden damit im Verlauf des Spiels immer weiter verfeinert[11].

Definition 5.5. Kann sich ein Spieler an jedem seiner Entscheidungsknoten an alle Informationen, über die er früher verfügte, insbesondere auch an seine eigenen Spielzüge, erinnern, so zeichnet er sich durch ein **perfektes Erinnerungsvermögen (Perfect Recall)** aus.

(Holler, 2006, S.44)

[11] Im Folgenden werde ich, falls nicht explizit angegeben, davon ausgehen, dass sich die beteiligten Spieler stets an alle früheren Informationen erinnern können.

5.5.2 Perfekte und Imperfekte Information

Definition 5.6. Sind im Spielverlauf einem Spieler alle vorangehenden Züge der Mitspieler bekannt, verfügt er über **perfekte Information**. Gilt dies für alle Spieler, liegt ein **Spiel mit perfekter Information** vor. In Situationen, in denen manche Spieler bestimmte Handlungen, beispielsweise Spielzüge, ihrer Mitspieler nicht beobachten können, herrscht **imperfekte Information**.

(Holler, 2006, S.44f.)

5.5.3 Vollständige und unvollständige Information

Bei der Analyse eines Spiels ist es von großer Bedeutung genau zu definieren, was als gemeinsames Wissen allen Spielern bekannt ist.

Definition 5.7. **Gemeinsames Wissen (Common Knowledge)** sind Informationen, die jedem Spieler bekannt sind und von denen auch jeder weiß, dass die anderen über dieses Wissen verfügen. Insbesondere sind die Spielregeln Teil des gemeinsamen Wissens.

Gemeinsames Wissen der Spielregeln ist daher eine Forderung an die hier behandelten strategischen Spiele.

Definition 5.8. Spielsituationen, in denen die Spieler über gemeinsames Wissen und alle relevanten Charakteristika ihrer Mitspieler vollständig informiert sind und keiner private Informationen über bestimmte individuelle Fähigkeiten besitzt, nennt man **Spiele mit vollständiger Information**.

Von vollständiger Information ausgehend, ist jeder Spieler prinzipiell in der Lage die optimalen Strategien seiner Mitspieler zu berechnen. Dies ist auch dann möglich, wenn er deren Spielzüge nicht beobachten kann. Jedem sind sowohl die Spielstruktur und in den meisten Fällen auch die anderen Mitspieler bekannt. Da jeder alle Gewinnfunktionen kennt und keine Unsicherheit über die relevanten Daten besteht, kann auch niemand getäuscht werden.

Spiele mit vollständiger Information haben den Vorteil, dass man sie verhältnismäßig einfach analysieren kann. Deshalb werden in den Ausführungen Spiele mit vollständiger Information im Vordergrund stehen, um später eine Analyse zu ermöglichen. In der Wissenschaft sind sie meist nur von begrenztem Interesse, da viele Aspekte von Spielsituationen nicht erfasst werden. Beispielsweise weiß jeder Kartenspieler, dass allein die Möglichkeit private Kenntnisse auszunutzen ein Spiel erst so richtig spannend macht.

Außerdem treten gerade bei vielen ökonomischen Problemen Situationen auf, in denen gewisse Eigenschaften eines Spielers i nicht bekannt sind. Dazu können seine Präferenzen, seine Erstausstattung, soweit sie nicht von anderen beobachtbar ist, aber auch seine Vermutungen über die anderen Spieler gehören. Solche Spiele nennt man Spiele mit unvollständiger Information[12]. Die Ausnutzung solcher Informationsunterschiede kann letztlich zum Phänomen der „negativen Auslese“ führen. Dieser Begriff stammt laut Holler (2006) aus der Versicherungstheorie und bezeichnet folgenden Sachverhalt: Bietet eine Versicherungsgesellschaft eine Durchschnittsprämie an, da sie zwischen guten und schlechten Risiken nicht unterscheiden kann, besteht die Möglichkeit, dass die angebotene Police für die „guten Risiken“ unattraktiv ist. In diesem Fall fragen nur noch diejenigen eine Versicherung nach, deren Schadenserwartung sehr hoch ist. Im Extremfall kann es dann zu einem Zusammenbruch des Marktes kommen.

Nach Holler (2006) hat Harsanyi Ende der sechziger Jahre des letzten Jahrhunderts gezeigt, dass Spiele mit unvollständiger Information wie Spiele mit vollständiger, aber imperfekter Information behandelt werden können.

> So gesehen, ist die Unterscheidung in Spiele mit imperfekter Information und solche mit unvollständiger Information heute unwesentlich: Spiele mit unvollständiger Information sind Spiele, in denen die Spieler imperfekte Information über die Spielzüge der Natur (als einem Dummy-Spieler) besitzen: Die Natur 'wählt' für jeden einzelnen Spieler i gewisse Eigenschaften, die seine Mitspieler nicht beobachten können. Sie sind unsicher darüber, welche konkreten Eigenschaften Spieler i aufweist. (Holler 2006, S.47)

Diese Unsicherheit hat Harsanyi geschickt umgangen. Und zwar nimmt er an, dass die Natur zu Spielbeginn als Spieler 0 eine Strategie wählt, die von allen anderen Spielern nur unvollständig beobachtbar ist. Die Menge aller möglichen Charakteristika der Mitspieler sei hier mit T_i bezeichnet. Mit ihrer Wahl legt die Natur nun für jeden Spieler i einen konkreten Typ $t_i \in T_i$ fest, der nur von i beobachtet werden kann. Die Spielform muss daraufhin Variable enthalten, die beschreiben, welche privaten Informationen jeder Spieler i haben könnte, die für die anderen nicht erkennbar sind. Somit kann man den Typ eines Spielers als Zufallsvariable auffassen. Allerdings ist ihre Realisation aber nur von i beobachtbar. Die Mitspieler sind sich derweil nicht sicher, welcher Typ t_i aus T_i Spieler i nun letztendlich ist und welche Eigenschaften

[12] In der ökonomischen Theorie oftmals auch als „Hidden Information“ bezeichnet.

er besitzt. Hierüber können sie sich nur bestimmte Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bilden. Folglich beschreibt t_i einen möglichen Zustand der privaten Informationen von Spieler i, der sowohl die Kenntnis der eigenen Fähigkeiten und Vorlieben aber auch subjektive Wahrscheinlichkeitseinschätzungen über unsichere Ereignisse beinhalten kann. Dies können beispielsweise Präferenzen der Mitspieler sein.

> Jeder Spieler i hat gewisse Vorstellungen darüber, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Natur eine bestimmte Kombination t_{-i} der Typen aller Gegenspieler wählt. Ein Spieler vom Typ t_i rechnet damit, daß mit der Wahrscheinlichkeit $p(t_{-i} \mid t_i)$ gerade die Kombination t_{-i} festgelegt wurde. Jeder Spieler hat eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Menge der Typen seiner Gegenspieler $T_{-i} = (T_1, ..., T_{i-1}, T_{i+1}, ..., T_n)$. (Holler, 2006, S.47)

Das Wissen über den eigenen Typ eröffnet oftmals auch die Möglichkeit bestimmte Informationen über die anderen Mitspieler zu erfahren. Selbstverständlich ist es nicht auszuschließen, dass die Wahrscheinlichkeitseinschätzung ein Teil der privaten Informationen ist. Die Beschreibung eines Spiels mit unvollständiger Information erfordert demnach eine exakte Angabe aller möglichen Kombinationen von den Typen der Spieler und die Spezifizierung der subjektiven Wahrscheinlichkeitseinschätzungen der Spieler.

(Holler, 2006, S.43ff.)

6 Darstellungsformen nichtkooperativer Spiele

Die Unterscheidung nach formaler Darstellung nichtkooperativer strategischer Spiele in Normal- und Extensivform erfolgt nach Berninghaus (2006).

Normal- und Extensivform sind aus traditioneller Sicht zwei verschiedene Darstellungsformen von gleichen strategischen Entscheidungssituationen. Sie wurden bis zu den Arbeiten von Selten in den 1960er und 1970er Jahren als äquivalente Beschreibungen derselben strategischen Situation allgemein akzeptiert.

> Selten hat gezeigt, dass die Extensivform zusätzliche Einsichten in die Natur von strategischen Problemen liefern kann, die in der Normalform verloren gehen, was allerdings nicht unumstritten ist [...]. (Berninghaus, 2006, S.91)

In dieser Arbeit beschränke ich mich in diesem Kapitel zunächst auf die Spiel- modellierung strategischer Spiele und in 7.1 und 7.2 auf deren Lösungsansätze. Das

Aufeinandertreffen der gewählten Strategien der einzelnen Spieler in einem Spiel führt zu einem Spielergebnis, welches wiederum anhand der Gewinnfunktion bewertet wird. Dies impliziert, dass mit der Durchführung des Spieles die Interaktion der Spieler beendet ist und / oder der Ausgang des Spiels keinen Einfluss auf das Spielerverhalten hat, wenn die Spieler erneut aufeinander treffen. Sicherlich ist es realistisch anzunehmen, dass in vielen Fällen die Spieler nicht nur ein einziges Mal interagieren, sondern die Möglichkeit besteht in der gleichen oder ähnlichen Entscheidungssituation aufeinander zutreffen. Diese Art der Modellierung soll jedoch bewusst hier nicht behandelt werden, da dies den Rahmen der Arbeit und auch die spätere Anwendung in der Schule überschreitet.

6.1 Spiele in Normalform

Das einfachste Modell zur Darstellung nichtkooperativer Spiele ist die Normalform, die manchmal auch als strategische Form bezeichnet wird. Hier entscheiden sich alle Spieler simultan für eine bestimmte Strategie, welche im einfachsten Fall aus einer einzigen Aktion besteht. Ein Normalformspiel stellt nach Rieck (2006) immer ein Ein-Zug-Spiel dar. Wie bereits in 5.2 erwähnt, unterscheidet man zwischen reinen und gemischten Strategien. Die reinen Strategien eines Normalformspiels werden wie folgt definiert.

Definition 6.1. Die möglichen Aktionen eines Spielers i bezeichnet man als **reine Strategien** σ_i. Die (hier endliche) **Menge aller reinen Strategien** nennt man $\Sigma_i = \{\sigma_{i1}, ..., \sigma_{im_i}\}$. Die **gemischten Strategien** von Spieler i, bezeichnet mit s_i, sind Wahrscheinlichkeitsverteilungen über der Menge der Strategien $\sigma_i \in \Sigma_i$. Die **Menge aller gemischten Strategien** von Spieler i ist gegeben durch eine Menge von m_i- dimensionalen Vektoren mit

$$S_i := \{(p_{i1}, ..., p_{im_i}) \in \mathbb{R}_+^{m_i} \mid \sum_{h=1}^{m_i} p_{ih} = 1\},$$

wobei p_{ij} die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, mit der Spieler i die Strategie σ_{ij} mit $j = 1, ..., m_i$.

Definition 6.2. Das Resultat der reinen Strategienwahlen nennt man **Strategienkonfiguration** $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \Sigma := \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_n$ des **Strategienraums** Σ. Analog dazu definiert man die Strategienkonfiguration der gemischten Strategien $s = (s_1, ..., s_n) \in S := S_1 \times ... \times S_n$ im Strategienraum S. Die jeweilige Strategienkonfiguration besteht aus einem Tupel, in dem jeder Spieler genau eine Strategie aus seiner Strategienmenge ausgewählt hat.

Aufgrund der Tatsache, dass in Normalformspielen meist reine Strategien verwendet werden, beschränke ich mich zunächst auf die Aussagen für reine Strategien. Eine reine Strategie kann als spezielle gemischte Strategien interpretiert werden. In diesem Fall wird eben diese gemischte Strategie mit Wahrscheinlichkeit 1 gewählt. Da nicht nur die einzelnen Aktionsmöglichkeiten der Spieler für die Analyse von Interesse sind, definiert man für ein Spiel in Normalform die Gewinnfunktion wie folgt.

Definition 6.3. Eine Strategienkonfiguration σ ruft ein Spielergebnis hervor, das jeder Spieler individuell nach seiner **Gewinnfunktion** $H_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ bewertet. Jeder Spieler ordnet somit jedem Spielausgang einen bestimmten Gewinn $H_i(\sigma)$ zu, der durch die Strategienmenge Σ bestimmt ist. Der **Auszahlungsvektor** $H(\sigma) := (H_1(\sigma), H_2(\sigma), ..., H_m(\sigma))$ enthält die Erwartungsauszahlungen an alle Spieler bei dem durch σ implizierten Spielausgang, wobei die i-te Komponente die Auszahlung an Spieler i bezeichnet.

Notation 6.4. Möchte man die Änderung der Strategie eines Spielers i, unter Kenntnis aller Strategien der restlichen Spieler, analysieren, vereinfacht man die Notation und schreibt die Strategienkonfiguration aller restlichen Spieler in Kurzform als $\sigma_{-i} = (\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_n)$. Zusammengesetzt ergibt sich dann $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i})$.

Jetzt ist es möglich die allgemeine Definition eines Spiels in Normalform nach Berninghaus (2006) anzugeben.

Definition 6.5. Ein **Spiel in Normalform** wird durch ein 2n+1- Tupel

$$G = \{\Sigma_1, ..., \Sigma_n; H_1, ..., H_n; N\}$$

beschrieben, wobei Σ_i die Strategienmenge, H_i die Gewinnfunktion von Spieler i und N die Spielermenge bezeichnet.

Durch Normalformspiele werden Konfliktsituationen mit einem Minimum an formalen Konzepten beschrieben. Die Zugfolge, der Informationsstand der Spieler über den bisherigen Spielablauf und alle weiteren Angaben werden nicht explizit aufgeführt, sondern gehen alle in das Konzept der Strategie und der Gewinnfunktion eines Spielers ein. Die Menge Σ_i der reinen Strategien, die jedem Spieler i zur Verfügung stehen, wird in dieser Darstellung vollständig beschrieben. Die Gewinnfunktion H_i gibt hier, und auch in der extensiven Darstellung (siehe Kapitel 6.2), den verschiedenen Spielern die Auszahlung jeder möglichen strategischen Konstellation an.

Die Normalformdarstellung eines Spiels kann oftmals von großem Nutzen sein, da höchst komplizierte Entscheidungsprobleme auf wesentliche Kernentscheidungen reduziert werden. In diesem Kapitel nehme ich nach Berninghaus (2006) an, dass alle

Spieler simultan ihre individuelle Strategie $\sigma_i \in \Sigma_i$ wählen. Dabei handelt es sich um die so genannten One-Shot-Spiele. Der Begriff simultan ist hier allerdings nicht wörtlich zu nehmen. Er bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Spieler ihre Wahl zu unterschiedlichen Zeitpunkten treffen können, aber zum Zeitpunkt ihrer eigenen Wahl die Strategienwahlen der anderen Spieler nicht kennen. Entscheidungstheoretisch ist dies äquivalent zur simultanen Wahl der Strategien.

Es folgt nun ein kurzer Abschnitt mit Definitionen besonderer Spiele, die in der Normalformdarstellung einfacher Situationen oftmals verwendet werden. Anschließend schließen Beispiele die Normalformdarstellung zunächst ab, die in Kapitel 7 mit den Lösungskonzepten nichtkooperativer Spiele wieder aufgegriffen wird.

Definition 6.6. Ein **Konstantsummenspiel** ist ein Spiel mit einer Auszahlung, für die gilt

$$\sum_{i \in N} H_i(\sigma) = C \quad C \in \mathbb{R} \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Ist $C = 0$, so spricht man von einem **Nullsummenspiel**.

Definition 6.7. Ein Zwei-Personen-Spiel $G = \{\Sigma_1, \Sigma_2; H = (H_1, H_2); N = \{1, 2\}\}$ mit endlich vielen Strategienmengen $\mid \Sigma_i \mid < \infty$ für i=1,2 heißt **Zwei-Personen-Nullsummenspiel**, falls $H_1(\sigma) + H_2(\sigma) = 0$ für alle $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$.

Der Gewinn des einen Spielers ist somit der Verlust des anderen. Da $H_1(\sigma) = -H_2(\sigma)$ gilt, genügt es die Gewinnfunktion eines Spielers in einer Matrix anzugeben.

Definition 6.8. Ein **Zwei-Personen-Spiel** heißt **symmetrisch**, wenn beide Spieler die gleiche Strategienmenge $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ besitzen und es eine Funktion $H : \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}$ gibt, so dass für die Auszahlungen der beiden Spieler gilt:

$$H_1(\sigma_1, \sigma_2) = H(\sigma_1, \sigma_2) \quad und \quad H_2(\sigma_1, \sigma_2) = H(\sigma_1, \sigma_2)$$

Definition 6.9. Ein **Spiel** $G = (N; H; \Sigma)$ heißt **endlich**, wenn die Anzahl der Spieler und die Anzahl der (reinen) Strategien für jeden Spieler i endlich sind.

Definition 6.10. Ein endliches Zwei-Personen-Spiel $G = (\Sigma_1, \Sigma_2; H; N = \{1, 2\})$ heißt **Matrixspiel**, auch **Bimatrixspiel** genannt. Sind $\Sigma_1 = (\sigma_1, ..., \sigma_m)$ und $\Sigma_2 = (\tilde{\sigma}_1, ..., \tilde{\sigma}_n)$ die Strategienmengen der beiden Spieler, so heißt die $m \times n$ Matrix

$$M = \begin{pmatrix} H(\sigma_1, \tilde{\sigma_1}) & \cdots & H(\sigma_1, \tilde{\sigma}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H(\sigma_m, \tilde{\sigma_1}) & \cdots & H(\sigma_m, \tilde{\sigma}_n) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1} & \cdots & H_{mn} \end{pmatrix}$$

die Spielmatrix von G.

Ein Matrixspiel wird vollständig beschrieben durch seine Spielmatrix. Die Zeilen entsprechen den Strategien von Spieler 1 und die Spalten denen von Spieler 2. Jedes Matrixfeld ist somit ein Strategienvektor $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$. Die Auszahlungsfunktionen H_1 und H_2 werden beispielsweise in tabellarischer Form so beschrieben, dass in jedem Matrixfeld links die Auszahlung für Spieler 1 und rechts die Auszahlung für Spieler 2 steht.

Im Falle eines symmetrischen endlichen Zwei-Personenspiels sind nach obiger Definition beide Matrizen zueinander transponiert. Handelt es sich bei dem Spiel außerdem um ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel, dann muss die Matrix M schiefsymmetrisch sein und es gilt daher $M = -M^T$.

Diese Art von Spielen sind nichtkooperative Spiele. Es existiert grundsätzlich keine Art von Absprache, da Vereinbarungen für einen Spieler vorteilhaft und für den anderen unvorteilhaft sind.

Man verwendet das Modell der Zwei-Personen-Nullsummenspiele meist für Situationen, in denen ein starker Interessenskonflikt vorliegt. Aber auch statistische Entscheidungsprobleme, die vielfach keinen eigentlichen Interessenskonflikt besitzen, können mit diesem Modell näherungsweise behandelt werden. Rieck (2006) meint, die Unterscheidung in Nullsummen- und Nichtnullsummenspiel ist nicht so entscheidend, wie so oft dargestellt. Er begründet dies damit, dass die meisten Lösungskonzepte für beide Fälle konzipiert sind.

(Berninghaus, S. 11ff. / Güth, 1992, S. 175 / Rauhut, 1979, S.129 / Rieck, 2006, S.95ff.,S.282ff. / Schlee, 200, S.27ff.)

Zur Illustration füge ich zwei Beispiele für Spiele in Normalformdarstellung an.

Beispiel 6.11. Das vereinfachte OPEC-Spiel

Hier wird nach Berninghaus (2006) ein Zwei-Personen-Spiel in Normalform, durch das die grundlegende strategische Situation der OPEC[13] abgebildet werden soll, dargestellt. Um diese Situation so einfach wie möglich zu halten, nehmen wir an, dass die Organisationen der OPEC lediglich aus zwei Mitgliedsblöcken besteht. Die OPEC wurde 1960 in Bagdad mit dem Ziel gegründet, Vereinbarungen über Ölfördermengen zu treffen. In diesem Spiel nehmen wir allerdings an, dass die Spieler keine bindenden Absprachen treffen können. Somit erhalten die von den Mitgliedern unterzeichneten Dokumente lediglich politische Absichtserklärungen. Eine weitere Vereinfachung ist, dass die Mitgliedsländer nur zwischen einer hohen (H) und einer niedrigen (N) Ölfördermenge wählen können.

Daraus ergeben sich die endlichen Strategienmengen $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{H, N\}$ der beiden Spieler. Die Auszahlungstabelle (in Bimatrixform) lautet daher

		Spieler 2	
		N	H
Spieler 1	N	$(H_1(N,N),H_2(N,N))$	$(H_1(N,H),H_2(N,H))$
	H	$(H_1(H,N),H_2(H,N))$	$(H_1(H,H),H(H,H))$

Abbildung 1: Ausführliche Normalform OPEC (Berninghaus, 2006, S.13)

Die Auszahlungskombinationen für beide Spieler stehen dabei jeweils in den Feldern der Auszahlungstabelle. Interpretiert man die Auszahlungen als Rohölexporterlöse (in Milliarden $), die sich durch die Fördermengenkombinationen ergeben, so ergibt sich folgende Matrix

		Spieler 2	
		N	H
Spieler 1	N	(5,5)	(0,6)
	H	(6,0)	(1,1)

Abbildung 2: Normalform OPEC (Berninghaus, 2006, S.14)

Die Daten dieses numerischen Beispiels drücken ein grundlegendes Problem der OPEC-Mitglieder aus. Wählen beide Spieler die geringe Fördermenge, so steigen die Weltmarkt-Erdölpreise. Dies führt wiederum zu den hohen Exporterlösen von fünf Milliarden $ für beide Länder. Nutzt aber ein Land diese Situation zu seinem Vorteil aus und erhöht seine Fördermenge, so steigert es seinen Exporterlös auf sechs Milliarden $. Antizipiert das andere Land die erhöhte Fördermenge und erhöht ebenfalls, so erhalten beide Länder die geringe Exporterlössitutaion von einer Milliarde $, denn der zu erwartende Preisverfall kann nicht durch resultierende Nachfrage aufgefangen werden.

Die für beide Spieler vorteilhafte Strategienkonfiguration (N,N), die zu hohen Exporterlöszuwächsen führt, ist somit instabil, da jedes Land einen Anreiz hat seine Fördermenge zu erhöhen. Erhöhen allerdings beide Länder, so erreichen sie die schlechtere Exportsituation.

(Berninghaus, 2006, S.13f.)

[13]engl. Organisation of the Petroleum Exporting Countries

Beispiel 6.12. Das Gefangenendilemma

An dieser Stelle soll die Originalversion des vielfach bekannten Spiels nach Berninghaus (2006) beschrieben werden. Es wird oftmals als Grundlage für die Modellierung sozialer Konfliktsituationen verwendet und ist das wohl bekannteste Beispiel der Spieltheorie.

> Zwei Täter, die gemeinsam eine schwere Straftat begangen haben, werden verhaftet und anschließend getrennt dem Haftrichter vorgeführt. Tatzeugen gibt es nicht. Der Haftrichter kann beiden, falls sie nicht geständig sind, lediglich illegalen Waffenbesitz nachweisen. Dann würde jeder zu einem Jahr Gefängnis verurteilt. Gesteht nur einer der beiden, kommt er aufgrund der Kronzeugenregelung frei. Sein Freund dagegen muss die volle Strafe von zehn Jahren Gefängnis absitzen. Gestehen allerdings beide, müssen sie, wegen mildernder Umstände, nur für acht Jahre ins Gefängnis. Weiterhin sind beide Täter in getrennten Zellen untergebracht und können zu keinem Zeitpunkt miteinander kommunizieren.

Die Strategienmengen der beiden Spieler sind definiert durch $\Sigma_i = \{G, N\}$, mit den Strategien „gestehen" (G) und „nicht gestehen" (N). Die Gewinnfunktionen können ebenfalls durch eine Tabelle dargestellt werden. Die Gewinne werden dabei in negativen Gefängnisjahren abgebildet.

		Spieler 2	
		G	N
Spieler 1	G	(- 8, -8)	(0, -10)
	N	(-10,0)	(-1,-1)

Abbildung 3: Normalform Gefangenendilemma (Berninghaus, 2006, S.15)

Aus der Tabelle kann man ablesen, dass sich beide Spieler sehr gut stellen, wenn sie die Tat nicht gestehen. Aufgrund der Kronzeugenregelung ist diese Konstellation allerdings nicht stabil, denn jeder der beiden kann durch ein Geständnis und die Ausnutzung der Kronzeugenregelung seine Lage individuell verbessern, indem er die Tat gesteht. Gestehen allerdings beide, erhält jeder acht Jahre Gefängnis und sie erreichen eine für beide unvorteilhafte Auszahlungsstituation.

(Berninghaus, 2006, S.14f.)

6.2 Spiele in Extensivform

Während die Normalform lediglich eine sehr knappe Beschreibung eines Spiels liefert, berücksichtigt die Extensivform, auch Spielbaumdarstellung genannt, weitere Eigenschaften des Spiels. Es ist hier möglich, den sequentiellen Ablauf eines Spiels darzustellen. Grundlegendes Prinzip ist die Darstellung der Partie als eine Folge von Ästen in einem Spielbaum, die von der Wurzel des Baumes bis zu den Endpunkten dargestellt wird. Formal kann dieser Spielbaum auch als Graph beschrieben werden.

Bei Spielen in Extensivform wird die Zugreihenfolge der einzelnen Spieler explizit aufgeführt und der Spielablauf in einzelne Stufen unterteilt. Auf jeder Spielstufe führen ein oder mehrere Spieler ihren Spielzug aus. Ebenso wird genau beschrieben, mit welcher Wahrscheinlichkeit einzelne Züge ausgeführt werden und welche Auszahlungen am Ende zu erwarten sind. Für die Beschreibung eines Spielbaumes benötigt man noch eine Reihe weiterer Begriffe, die an dieser Stelle nach Güth (1992) und Berninghaus (2006) eingeführt werden.

Definition 6.13. Ein **Graph** ist definiert als ein System von Knoten und die Knoten verbindenden Strecken. Er ist **zusammenhängend**, wenn jeder Knoten mit jedem anderen Knoten durch einen Streckenzug verbunden ist. Weiterhin ist der Graph **schleifenlos**, wenn der verbindende Streckenzug von jeweils zwei Knoten, ohne Rückwärtsbewegung, eindeutig ist.

Definition 6.14. Ein **Spielbaum eines Extensivformspiels** ist ein zusammenhängender, schleifenloser, endlicher Graph mit einem den Spielanfang kennzeichnenden Knoten o, auch Wurzel genannt.

Die Knoten beschreiben die jeweilige Entscheidungssituation und seine Äste die möglichen Handlungen, die ein Spieler durchführen kann, wenn er am Zuge ist. Im Folgenden werde ich den Spielanfangsknoten, je nach vorliegender Situation, nach oben oder links einzeichnen.

Definition 6.15. Sei K die **Menge der Knoten** des Spielbaumes und $Z \subset K$ die **Menge seiner Endpunkte**. Jeder dieser Endpunkte repräsentiert genau einen möglichen Spielausgang. Die Elemente der Menge $X = \{x \in K \setminus Z\}$ sind die **Entscheidungsknoten**, an denen der weitere Verlauf durch eine Entscheidung zwischen den weiterführenden Verbindungsstrecken bestimmt wird. Die **Spielerzerlegung** $P = \{P_1, ..., P_n\}$ legt für jeden Entscheidungsknoten $x \in X$ fest, welcher Spieler den weiteren Verlauf des Spiels bestimmt. P_i umfasst für i = 1,...,n genau die Knoten , an denen Spieler i am Zuge ist.

In vielen Gesellschaftsspielen sind die Spieler auf einzelnen Spielstufen nicht vollständig über die Aktionen ihrer Gegenspieler in den vorangegangenen Spielzügen informiert und es herrschen zum Teil unterschiedliche Informationsbedingungen. Dies kann, wie bereits in Abschnitt 5.5 erwähnt, verschiedene Gründe haben und wird in diesem Spiel vorab explizit formuliert. Im Spielbaum wird dieser Zustand durch Informationsmengen modelliert.

Definition 6.16. Eine **Informationspartition** $U_i = \{u_{i1}, ..., u_{iK_i}\}$ eines Spielers i ist eine Zerlegung von P_i für i = 1,...,n. Die u_{ik} geben die Informationen von Spieler i an, über die er auf den jeweiligen Spielstufen verfügt, wenn er am Zug ist.

- Ist u_{ik} einelementig, so besitzt er perfekte Information über die vorangegangenen Züge.
- Hat u_{ik} mehr als ein Element, so kann er seine Position im Spielbaum B nicht mehr exakt bestimmen. Er kennt einige der vorab durchgeführten Aktionen nicht.

Die Informationszustände der Spieler werden in $U = \{U_1, ..., U_n\}$ zusammengefasst. Unvollkommene Information eines Spielers stellt man durch eine gestrichelte Linie auf der jeweiligen Stufe dar, indem man die betreffenden Entscheidungsknoten miteinander verbindet.

Mit Hilfe der Informationszerlegung U ist es nun möglich das Konzept der Aktionsmenge C einzuführen.

Definition 6.17. Die **Aktionsmenge** $C := \{C_u\}_{u \in U}$ bezeichnet die Menge aller Aktionen, die an der Informationsmenge u verfügbar sind.

Anmerkung 6.18.

1. Bei der graphischen Darstellung eines Spielbaumes wird die Aktionsmenge C_u an jedem Knoten $x \in u$ dargestellt, obwohl sie eigentlich auf den Informationsmengen u und nicht auf den Knoten selbst definiert ist. Dies hat einen einfachen Grund, denn der Ausgang eines Spiels hängt bekanntlich davon ab, welcher Punkt in der Informationsmenge erreicht wurde. Der unvollkommen informierte Spieler kennt jedoch den Ausgang des Spiels nicht.

2. Aus Anmerkung 1 folgt eine wichtige Forderung für die Darstellung der Informationsmengen: Die an jedem Knoten $x \in u$ verfügbaren Informationsmengen sind gleich (C_u).

Zur Analyse des gesamten Spielverlaufes benötigt man die folgenden Definitionen nach Berninghaus (2006).

Definition 6.19. Eine Folge von aufeinander folgenden Aktionen der Spieler, die in o beginnt, und in einem Endpunkt $z \in Z$ endet, wird **Pfad** oder **Partie** genannt.

Definition 6.20. Die **Gewinnfunktion** eines extensiven Spiels ist definiert als $\Pi : Z \to \mathbb{R}^n$, wobei die i-te Komponente $\Pi_i(z)$ von $\Pi(z)$ mit $z \in Z$ die Auszahlung von Spieler i (i = 1,...,n) bezeichnet, wenn ein Pfad im Endpunkt e endet.

Jeder Pfad in einem Extensivformspiel wird also durch einen Auszahlungsvektor bewertet, dessen Komponenten die Auszahlungen der einzelnen Spieler bezeichnen.

Die vollständige Beschreibung eines extensiven Spiels benötigt noch ein weiteres Konzept, das Konzept des Zufallsspielers. Der Zufall wird in extensiven Spielen stets als eigener Spieler, dem Zufallspieler, dargestellt und oftmals mit der Spielernummer 0 gekennzeichnet. Rieck (2006) verwendet synonym auch den Begriff der Natur. Außerdem weist er darauf hin, dass diese Begriffe einen Gegensatz zu den realen Spielern darstellen, deren strategisches Entscheidungsverhalten in der Spieltheorie von eigentlichem Interesse ist. Bei Zufallszügen ist es notwendig, dass die Spielregeln die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Züge des Spielers 0 angeben.

Definition 6.21. Pr bezeichnet die **Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen**, die der Zufallsspieler in einem Extensivformspiel zur Verfügung hat. Jedem Informationsbezirk U_0 wird somit seine Realisationswahrscheinlichkeit zugeordnet.

Existieren in einem Spiel mehrere Zufallsknoten, die jedes Mal mit der 0 versehen sind, handelt es sich jeweils um unabhängige Zufallsmechanismen, die nicht miteinander korreliert sind.

Zusammengefasst erhält man folgende Definition zur vollständigen Beschreibung eines Extensivformspiels.

Definition 6.22. Ein **Spiel in Extensivform** ist gegeben durch das Tupel:

$$\Gamma = \{N, X, Z, P, U, C, \Pi, Pr\}$$

Dabei bezeichnet N die endliche Spielermenge, X die Menge der Entscheidungsknoten, Z die Menge der Endpunkte, P die Spielerzerlegung von K, U die Informationszerlegung, C die Aktionsmengen der Spieler, Π die Auszahlungsfunktion (auf den Spielergebnissen) und Pr die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsspieler.

Die in den Normalformspielen bereits verwendeten Begrifflichkeiten der Strategien werden in Extensivformspielen wie folgt definiert.

Definition 6.23. Gegeben sei ein Extensivformspiel Γ. Eine **reine Strategie** von Spieler i ist eine Funktion

$$\phi_i : U_i \to \{C_u\}_{u \in U_i}$$

die jedem $u \in U_i$ ein Element $\phi_i(u) \in C_u$ zuordnet. Mit Φ_i werde im Folgenden die **Menge aller reinen Strategien** von Spieler i in einem Extensivformspiel Γ bezeichnet.

Man versteht unter einer reinen Strategie eine Vorschrift, die jeder Informationsmenge $u_{ik} \in U_i$ des Spielers i eine ihm zur Verfügung stehende Aktion in der Menge $C_{u_{ik}}$ zuordnet. Jede reine Strategie veranlasst an jedem Teil des Spielbaumes, an dem Spieler i an der Reihe ist, eine bestimmte Aktion. Selbst wenn die Möglichkeit besteht, dass dieser Teil des Baumes nie erreicht wird, erfolgt eine ausführliche Zuweisung. Dadurch ist es erst möglich, alle strategischen Möglichkeiten eines einzelnen Spielers zu erfassen. Eine gemischte Strategie s_i ist dagegen als Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\Phi_i$definiert.

Definition 6.24. Gegeben sei die (endliche) Menge Φ_i der reinen Strategien von Spieler i in einem Extensivformspiel Γ mit $|\Phi_i| = m_i$, dann ist die **Menge der gemischten Strategien** gegeben durch

$$S_i := \{s_i = (p_{i1}, ..., p_{im_i}) \in \mathbb{R}_+^{m_i} \mid \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} = 1\}$$

Mit anderen Worten ist eine gemischte Strategie als ein globaler Zufallsmechanismus auffassbar, der sich über Aktionen des gesamten Spielbaumes erstreckt.

Des Weiteren existiert für Spiele in extensiver Form ein weiteres Strategienkonzept. Diese so genannte Verhaltensstrategie ordnet einem Spieler lokal an jeder seiner Informationsmengen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die ihm zur Verfügung stehenden Möglichkeiten zu.

Definition 6.25. Eine **Verhaltensstrategie** von Spieler i ist ein Tupel von Wahrscheinlichkeitsverteilungen $b_i = \{b_{iu}\}_{u \in U_i}$, wobei b_{iu} jeweils eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über C_u bezeichnet. Mit B_i werde im Folgenden die **Menge aller Verhaltensstrategien** von Spieler i (i = 1,...,n) dargestellt.

Bemerkung 6.26. Die reinen Strategien sind Spezialfälle von Verhaltensstrategien, denn eine Verhaltensstrategie b_i, die an jeder Informationsmenge eine bestimmte Aktion stets mit Wahrscheinlichkeit 1 auswählt, ist gleich einer reinen Strategie $\phi_i \in \Phi_i$.

Es stellt sich nun die Frage, welche Beziehungen zwischen den gemischten Strategien und den Verhaltensstrategien existieren, da beide Vorstellungen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der Menge aller möglichen Aktionen von Spieler i sind. Zur Konstruktion gemischter Strategien wählt ein Spieler stochastisch einen bestimmten Verhaltensplan im Sinne einer Strategie. Die Konstruktion einer Verhaltensstrategie ist dagegen eine einzelne Zufallswahl einer Handlung an jeder Informationsmenge.

Berninghaus (2006) führt die Gleichwertigkeit von Verhaltens- und gemischten Strategien nach einer bedeutenden Arbeit von Kuhn an.

> Angenommen, alle Spieler können sich auf jeder Stufe des Spiels an alle ihrer vergangenen Spielzüge erinnern, dann kann man zeigen, dass gemischte Strategien und Verhaltensstrategien äquivalent sind in dem Sinne, dass sie die gleichen (erwarteten) Auszahlungen generieren.
>
> (Kuhn in Berninghaus 2006, S.97)

Aufgrund der Tatsache, dass die Verhaltensstrategien in den meisten Fällen deutlich einfacher anwendbar sind als gemischte Strategien, werden sie in extensiven Spielen überwiegend verwendet. Ausgehend vom perfekten Erinnerungsvermögen der Spieler, eine Annahme, die in den meisten Spielen von Natur aus enthalten ist oder aber ausdrücklich formuliert wird, verschafft das Ergebnis von Kuhn nach Berninghaus (2006) eine Fundierung dieser Vorgehensweise.

Zum weiteren Verlauf sei angemerkt, dass in der Spielbaumdarstellung die Auszahlungen der einzelnen Spieler den Endpunkten des Baumes, und somit den Spielausgängen, unmittelbar zugeordnet sind. Davon ausgehend werden nun die Gewinne einer Strategienkonfiguration von Verhaltensstrategien definiert, um anschließend auf weitere Eigenschaften und in einem späteren Kapitel auf die Lösungskonzepte eingehen zu können.

Definition 6.27. Gegeben sei ein Pfad $\tilde{p} = (c_{u(1)}, ..., c_{u(k)})$ der Länge k mit Endpunkt z_k. Er sei beschrieben durch die Abfolge von Aktionen der Spieler, wobei $c_{u(h)}$ eine Aktion des Spielers bezeichnet, der auf der h-ten Stufe an seiner Informationsmenge $u(h)$ am Zug ist. Dann ist die **Wahrscheinlichkeit für den Endpunkt** z_k bei gegebener Konfiguration von Verhaltensstrategien b durch den Ausdruck

$$P^b(z_k) = b_{i(u(1))}(c_{u(1)}) \cdot ... \cdot b_{i(u(k))}(c_{u(k)})$$

gegeben, wobei $i(u(h))$ den Index des Spielers bezeichnet, der auf Stufe h gemäß dem Pfad $\tilde{p}$ am Zuge ist.

Dank der Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Endpunkte $z \in Z$ ist es möglich den Nutzen der Spieler direkt einer Gestalt von Verhaltensstrategien b zuzuordnen.

Definition 6.28. Gegeben seien $b = (b_1, ..., b_n)$ und die Gewinnfunktion $\Pi(.)$ eines Extensivformspiels. Der **Gewinn** von Spieler i für i = 1,...,n ist der Erwartungswert der Auszahlungen $H(z)$ über alle möglichen Spielausgänge $z \in Z$ und somit $H_i(b_1, ..., b_n) := \sum_{z \in E} \Pi_i(z) P^b(z)$.

Ebenso geht man bei gemischten Strategien vor. Jede Konfiguration reiner Strategien erzeugt genau einen Pfad im Spielbaum. Die Konfiguration der gemischten Strategien erzeugt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den Pfaden, die letztendlich zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den Endpunkten führt. Anders als bei den Verhaltensstrategien legt jeder Spieler in diesem Fall die Wahrscheinlichkeiten für die gesamten Aktionsfolgen fest. Damit kann er die Aktionswahl auf den einzelnen Spielstufen nur logisch erschließen. Fest steht aber, dass jedes einzelne Tupel aus reinen Strategien $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$ eindeutig einen Pfad $\tilde{p}_z$ im Spielbaum mit dem Endpunkt z hervorruft. Zur Verdeutlichung dieser Abhängigkeit bezeichnet man diese Strategienkonfiguration mit ϕ^z.

Definition 6.29. Gegeben sei eine Konfiguration von gemischten Strategien mit $s = (s_1, ..., s_n)$, dann ist die **durch s induzierte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Z**, die mit $P^s(.)$ bezeichnet wird, gegeben durch $P^s(z) := s(\phi^z)$.

Gibt man den Gewinn für jeden einzelnen Spieler jeder einzelnen Gestalt gemischter Strategien s an, benutzt man die folgende Definition.

Definition 6.30. Gegeben sei eine Konfiguration von gemischten Strategien mit $s = (s_1, ..., s_n)$, dann ist der **Gewinn von Spieler i** gegeben durch:

$$H_i(s_1, ..., s_n) := \sum_{z \in E} \Pi_i(z) P^s(z)$$

Berninghaus (2006) greift in diesem Zusammenhang die Aussage von Kuhn wieder auf und präzisiert die bereits dargestellte Äquivalenz in Spielen mit perfect recall. Ich beschränke mich an dieser Stelle auf die Formalisierung des perfect recalls und setze diese im weiteren Verlauf voraus.

Bezeichnung 6.31. Sei $c \in C_u$ eine Aktion, die ein Spieler in der Informationsmenge u durchführen kann, und $k \in K$. Die Relation $c \prec_\Gamma k$ bedeutet in diesem Fall, dass die Kante c auf einem durch den Spielbaum von Γ gehenden Pfad vor dem Knoten k liegt.

Aufgrund dieser Relation ist es möglich den Begriff der vollkommenen Erinnerung an vorangegangene Spielzüge darzustellen.

Definition 6.32. In einem **Extensivformspiel Γ mit perfect recall** gilt für jeden Spieler i (i = 1,...,n): Gegeben seien Informationsmengen $u, v \in U_i$ und $c \in C_u$, $x, y \in v$, dann gilt

$$c \prec_\Gamma x \Leftrightarrow c \prec_\Gamma y$$

Mit anderen Worten müssen für die Eigenschaft des perfect recalls alle Punkte in der Informationsmenge des Spielers i durch diesselbe Aktion c von Spieler i auf einer vorangegangenen Stufe hergeleitet sein.

Anmerkung 6.33. Spielbäume lassen sich nur für eine diskrete Strategienmenge zeichnen. Holler (2006) zeigt aber an einem Beispiel, einer Variante des Dyopolspiels, dass in einem extensiven Spiel mit stetigem Strategienraum die gleichen Überlegungen gelten.

(Berninghaus, 2006, S.90ff. / Güth, 1992, S.34ff.)

Beispiel 6.34. Einfaches Koordinationsproblem

Wir betrachten zwei Unternehmen, die zwei Typen von Disketten herstellen können. Unternehmen A beginnt mit der Produktion, während Unternehmen B die Produktionsentscheidung von A abwartet. Mit dieser Entscheidung ist die Zugfolge vorgegeben. Des Weiteren hat jedes Unternehmen nur zwei Möglichkeiten zu agieren, wenn es am Zug ist. Das Diskettenformat „g“ (groß) oder „k“ (klein) kann für die Produktion gewählt werden. Diese Entscheidungssituation wird durch den folgenden Spielbaum illustriert. Die Endpunkte mit ihren Auszahlungsvektoren verdeutlichen die unterschiedlichen Spielverläufe. Die erste Komponente des Auszahlungsvektors gibt den Gewinn für Unternehmen A und die zweite für Unternehmen B an.

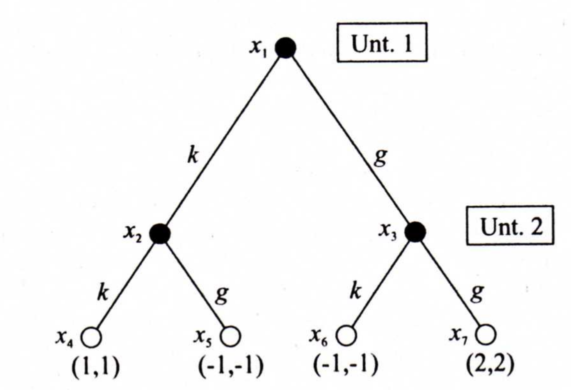


Abbildung 4: Spielbaum (Berninghaus, 2006, S.92)

In dieser Darstellung sehen wir zunächst von einem Zufallsspieler ab und setzen vollständige Information voraus. Die Knotenmenge ist hier durch $K = \{x_1, ..., x_7\}$ gegeben und die Menge der Endpunkte durch $Z = \{x_4, ..., x_7\}$. Die Menge der Entscheidungsknoten enthält somit drei Elemente und es gilt $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Ferner bestehen die Spielerzerlegungen aus den Elementen $P_1 = \{x_1\}$, $P_2 = \{x_2, x_3\}$ und die Informationszerlegungen aus $U_1 = \{u_{11}\}$ und $U_2 = \{u_{21}, u_{22}\}$ mit $u_{11} = \{x_1\}$, $u_{21} = \{x_2\}$ und $u_{22} = \{x_3\}$, wenn Unternehmen B vollständig über A informiert ist.

Die Auszahlungen dieses Koordinationsproblems zeigen, dass die Unternehmen bei Produktion des gleiches Diskettenformates mehr Gewinn erzielen können als bei einer Fehlkoordination. Außerdem wird deutlich, dass sich beide besser stellen, wenn ihre Wahl auf das größere Format fällt.

Erweitert man dieses Szenario und nimmt an, dass Unternehmen B bei seiner Produktionsentscheidung noch nichts über die Entscheidung von A weiß, ändert sich die Informationszerlegung. Unternehmen B besitzt zu diesem Zeitpunkt unvollständige Information. Die Informationszerlegungen lauten in diesem Fall $U_2 = \{u_{21}\}$ mit

$u_{21} = \{x_2, x_3\}$ und $U_1 = \{x_{11}\}$, wobei weiterhin $u_{11} = \{x_1\}$ gilt. Graphisch wird die unvollständige Information von Unternehmen B durch eine gestrichelte Linie zwischen den Knoten x_2 und x_3 im folgenden Spielbaum dargestellt.

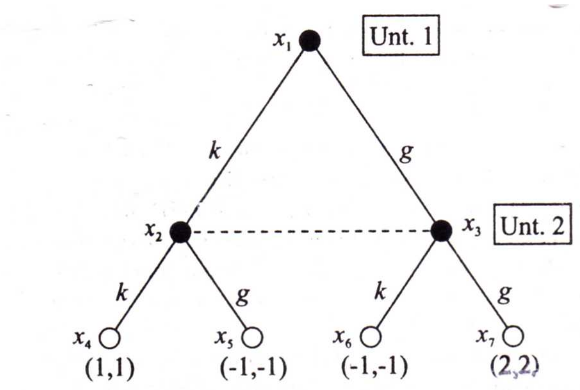


Abbildung 5: Spielbaum bei unvollkommener Information (Berninghaus, 2006, S.94)

Ferner sind die Aktionsmengen beider Spieler durch $C_{u_{11}} = \{g, k\}$ und $C_{u_{21}} = \{g, k\}$ gegeben. Die Auszahlungen der einzelnen Partien sind immer noch unverändert.

Bisher ist man stets davon ausgegangen, dass die Konsequenzen jeder Aktion sicher sind und die Unternehmen ihren Gewinn ihrer durchgeführten Aktionen genau kennen. Interpretiert man allerdings die Auszahlungen als Gewinnveränderungen, so kann man größtenteils davon ausgehen, dass die Unternehmen diese Veränderungen nicht kennen und sie schätzen müssen.

Angenommen A und B kennen aus Erfahrungen die Gewinnveränderungen für alle Aktionsfolgen, bis auf den Fall, dass beide das große Format wählen. Hier ergebe eine durchgeführte Marktstudie, dass die Nachfrage zwei unterschiedliche Ausprägungen annehmen kann, welche mit Wahrscheinlichkeit 0,2 und 0,8 eintreten können. An dieser Stelle kommt das Konzept des Zufallsspielers zum Tragen.

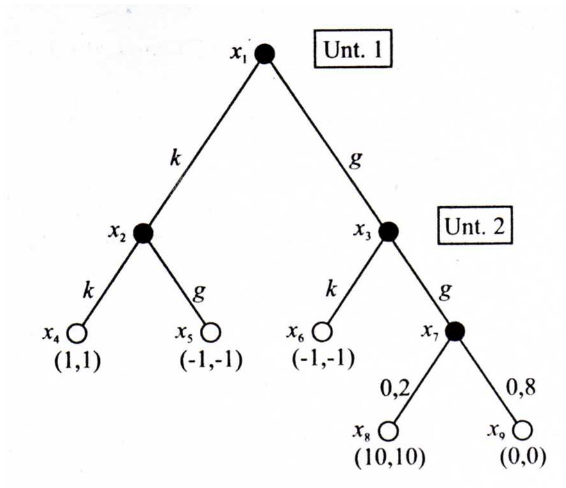


Abbildung 6: Spielbaum mit Zufallsspieler (Berninghaus, 2006, S.95)

Im obigen Spielbaum gilt daher $P_0 = \{x_7\}$ und $p_{x_7} = \{0,2; 0,8\}$.

(Berninghaus, 2006, S.92ff.)

6.3 Übersetzung der Darstellungsweisen

Wie bereits angedeutet, besteht die Möglichkeit die Darstellungsweisen Normal- und Extensivform ineinander überzuführen. Bis zur Publikation der Arbeiten von Selten sah man beide Darstellungsweisen sogar als äquivalent an. Heute verwendet man die Normalformdarstellung, um möglichst einfach und verkürzt reine Strategien darzustellen. Aufgrund der Übersichtlichkeit sollte die Anzahl der Spielteilnehmer bei der Wahl dieser Darstellung allerdings nicht zu groß sein, denn die Matrixdarstellung stößt nach Rieck (2006) schnell an ihre Grenzen und erfordert eine recht aufwendige Notation für konkrete Spiele. Die Spielbaumdarstellung ermöglicht im Gegensatz dazu die vollständige Darstellung der einzelnen Entscheidungsmöglichkeiten der Spieler und des chronologischen Spielablaufs. Er ergänzt, dass man sich hier vorstellen kann, dass die Teilnehmer das Spiel interaktiv spielen und jeweils auf die Entscheidungen der anderen reagieren, wenn sie am Zug sind. Die Spielmatrix oder Auszahlungstabelle kann dagegen nicht immer alle relevanten Aspekte des zu behandelnden Spiels wiedergeben. Rieck (2006) bezeichnet ein Normalformspiel als ein Ein-Zug-Spiel, das in vielen Fällen von großem Nutzen sein kann, weil dadurch erst äußerst komplizierte Entscheidungsprobleme auf die wesentlichen Kernentscheidungen reduziert werden können. Mehlmann (1997) betont des Weiteren, dass es stets möglich ist von einem Spielbaum in eine abstrakte Normalformdarstellung, die induzierte Normalform, zu gelangen. Man nutzt diese Möglichkeit, um in der Normalform die Lösungen, auch Gleichgewichte genannt, zu bestimmen. Allerdings weist er auch darauf hin, dass die Lösungen in gemischten Strategien in der Normalform keine direkt ersichtlichen Verhaltensmuster im extensiven Spiel vermitteln. Für extensive Spiele mit perfect recall existiert durch Hinzunahme des Konzeptes der Verhaltensstrategien eine Möglichkeit gemischte Strategien darzustellen. Hier wird auch die Problematik der Übersetzung von einer in die andere Form deutlich. Zusammenfassend kann man sagen, dass eine Übersetzung prinzipiell möglich ist, aber die Ergebnisse, auch nachdem man eine Lösung gefunden hat, stets kritisch hinterfragt werden müssen.

(Mehlmann, 1997, S.43f. / Rieck, 2006, S.153ff.)

6.4 Agentennormalform

Wie bereits in 6.3 deutlich wurde, besteht bei einer Übersetzung in die induzierte Normalform die Möglichkeit des Informationsverlustes. Die Idee der Agentennormalform besteht nun darin, dass die einzelnen Züge der Spieler gegenüber gestellt werden. Hier bleiben viel mehr Details der Spielsituation erhalten. Fast alles, bis auf die zeitliche Struktur, die in vielen Fällen auch in der Spielbaumdarstellung willkürlich ist, kann vollständig abgebildet werden. Rieck (2006, S.235) definiert die Situation für Spieler folgendermaßen.

Definition 6.35.

> Ein **Agent** des Spielers i ist eine selbständige Entscheidungseinheit, die genau die gleichen Auszahlungen besitzt wie Spieler i, aber nur genau einen seiner Informationsbezirke verwaltet. Die Strategienmenge eines Agenten ist die Zugmenge des von ihm verwalteten Informationsbezirks.

In der speziellen Normalform werden die Agenten dann so miteinander in Beziehung gesetzt, als handele es sich um einzelne Spieler in der Normalform. Er fügt hinzu

Definition 6.36.

> In der **Agentennormalform** zerfällt jeder Spieler in Agenten. Die Strategienmengen dieser Agenten werden einander als Normalformspiel gegenübergestellt (so, als handelte es sich um völlig eigenständige Spieler).

(Berninghaus, 2006, S.133ff. / Güth, 1992, S.124ff. / Rieck, 2006, S.157f., 235ff.)

7 Lösungskonzepte nichtkooperativer Spiele

7.1 Lösungskonzepte von Spielen in Normalform

Bisher wurde zunächst allgemein die strategische Situation der an einem Normalformspiel G beteiligten Spieler anhand von Beispielen dargestellt. Allerdings blieb die konkrete Wahl der Strategie, die ein Spieler zu treffen hat, noch offen. Gesucht ist eine Strategienkonfiguration $\sigma \in \Sigma$, die als Lösung des Spiels G bezeichnet wird. Berninghaus (2006) ergänzt, dass solche Strategienkonfigurationen in der spieltheoretischen Literatur auch Gleichgewichte genannt werden.

Definition 7.1. **Gleichgewichte** sind Lösungen, die sich dadurch auszeichnen, dass die Spieler ihre Strategieentscheidungen nicht revidieren wollen, wenn sie die Wahl der anderen Spieler kennen.

Eine Lösungsfunktion für Normalformspiele G soll im weiteren Verlauf allgemein als eine Funktion L(.) aufgefasst werden, die jedem Spiel eine Menge von Lösungen $L(G) \subseteq \Sigma$ zuordnet. Es wird sich noch herausstellen, dass die betrachteten Lösungskonzepte nicht immer eindeutig sind und es Spiele geben kann, für die $\mid L(G) \mid > 1$ gilt. Des Weiteren kann auch $\mid L(G) \mid = 0$ gelten. Dies tritt nach Berninghaus allerdings nur ein, wenn der Lösungsbegriff zu anspruchsvoll gewählt wird oder im Falle des Gleichgewichtkonzeptes unvernünftig ist.[14]

Im Folgenden werde ich stets voraussetzen, dass $L(G)$ nicht leer ist und formuliere die Lösungsfunktion als eine nicht-eindeutige Funktion.

Definition 7.2. Es bezeichne $\mathcal{G}$ die **Menge aller Normalformspiele** und Σ_G die zu Spiel G gehörige **Menge aller Strategienkonfigurationen**. Weiter bezeichne $\mathcal{P}(\Sigma_G)$ die **Menge aller Teilmengen** von Σ_G. Eine **Lösungsfunktion** für Normalformspiele $G \in \mathcal{G}$ ist eine Funktion L(.) mit

$$L : \mathcal{G} \rightarrow \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \mathcal{P}(\sum{}_G),$$

die jedem Spiel in Normalform eine **Menge von Strategienkonfigurationen** $L(G) = \{\sigma\} \subseteq \Sigma_G$ zuordnet, die rationales Verhalten der Spieler beschreiben.

(Berninghaus, 2006, S.16f / Holler, 2006, S.54f.)

[14] Beispiel nach Berninghaus (2006, S.17) „Wenn zum Beispiel derjenige von mehreren Spielern gewinnt, der die größte Zahl wählt und die Anzahl der wählbaren Zahlen unbeschränkt ist. Dann kann es offenkundig keine (Gleichgewichts-) Lösung geben."

7.1.1 Konzept der strengen Dominanz

Definition 7.3. Eine Strategie $\sigma_i^0 \in \Sigma_i$ heißt **streng dominant**, wenn im Vergleich mit jeder anderen Strategie $\sigma_i \in \Sigma_i - \{\sigma_i^0\}$ gilt

$$H_i(\sigma_{-i}, \sigma_i^0) > H_i(\sigma_{-i}, \sigma_i) \, \forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$$

Eine streng dominante Strategie σ_i^0 von Spieler i ist somit dadurch charakterisiert, dass sie ihm unter allen verfügbaren Strategien den höchsten Nutzen verschafft. Allgemein formuliert dominiert eine Entscheidung A eine Entscheidung B streng, wenn bei jedem Verhalten der anderen Spieler A besser ist als B. Dagegen dominiert A B schwach, wenn A bei jedem Verhalten der Mitspieler mindestens gleich gut ist wie B und mindestens in einem Fall besser.

Verfügt in einem Spiel jeder über eine streng dominante Strategie, so ist es offensichtlich für jeden Spieler rational σ_i^0 als nichtkooperative Lösung zu spielen. Aus der Definition der streng dominanten Strategien sieht man sofort, dass ein Spieler maximal eine streng dominante Strategie besitzen kann. Allerdings folgt nicht, dass die daraus resultierenden Gewinne kollektiv rational für alle Spieler sind.

Definition 7.4. Eine Strategienkonfiguration σ^* ist ein **Gleichgewicht in dominanten Strategien**, wenn alle Spieler ihre dominante Strategie wählen. Demnach gilt

$$H_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) \geq H_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

für alle i, $\sigma_i \in \Sigma_i$ und $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$.

Beispielsweise ist das Strategienpaar „Gestehen" im Gefangenendilemma im Beispiel 6.12. ein Gleichgewicht in dominanten Strategien.

Berninghaus (2006) fügt an, dass dieses Lösungskonzept der streng dominanten Strategien aus individueller Sicht ein sehr überzeugendes Konzept ist, auch wenn es leider nicht immer zu zufriedenstellenden Auszahlungen führt. Dieses Konzept schließt zwar bestimmte Verhaltensweisen aus, aber es handelt sich nicht um ein Lösungskonzept, das genau angibt, welches Verhalten zum Beispiel gespielt werden soll. In vielen Spielsituationen ist außerdem die optimale Strategie eines Spielers in der Regel von den anderen Mitspielern abhängig. Es handelt sich hierbei um ein sehr spezielles Lösungskonzept, denn es gibt sehr viele Spiele, für die eine Lösung in streng dominanten Strategien nicht existiert. Betrachte dazu das folgende Beispiel nach Berninghaus (2006) aus dem Pazifischen Krieg.

Beispiel 7.5. ***Battle of the Bismarck Sea***

Die Kriegsgegner USA und Japan standen vor folgendem Problem: Der japanische Flottenadmiral will einen Teil der japanischen Flotte zu einer Insel bringen, um Nachschub für die kämpfenden Truppen dorthin zu transportieren. Dazu stehen ihm vom Heimathafen aus zwei Routen zur Verfügung, die Nord-Route (N) und die Süd-Route (S). Der amerikanische Luftwaffengeneral hat seine Flugzeugstaffel zwischen der Nord- und der Süd-Route stationiert und kann seine Flugzeuge somit entweder auf die Nord- oder auf die Süd-Route dirigieren.

Die Strategienmengen sind demnach für beide Spieler gegeben durch $\Sigma_i = \{N, S\}$ und die Auszahlungen werden in diesem Modell in resultierenden Bombardierungstagen[15] gemessen. Die Auszahlungsfunktionen lauten wie folgt

		Japan N	Japan S
USA	N	(2,-2)	(2,-2)
	S	(1,-1)	(3,-3)

Abbildung 7: Normalform Battle of the Sea (Berninghaus, 2006, S.20)

Benutzen beide die gleiche Route, ist die Süd-Route für die USA günstiger, weil hier wegen des besseren Wetters mehr Bombardierungstage möglich sind. Wählen sie unterschiedliche Routen, müssen die Flugzeuge jeweils umdirigiert werden. Werden die Flugzeuge zunächst nach Süden geleitet, führt dies zum geringsten Bombardierungserfolg. Die Flugzeuge müssen zum einen nach Norden umgeleitet werden und zum anderen werden sie aufgrund des schlechteren Wetters auf der Nord-Route behindert.

(Berninghaus, 2006, S.19)

(Berninghaus, 2006, S.18ff.)

7.1.2 Konzept der Eliminierung dominierter Strategien

Existiert in einem Spiel, wie beispielsweise im Beispiel 7.5., keine streng dominante Strategie, ist es für die einzelnen Spieler wichtig zu antizipieren, was der Gegner für eine Strategie wählt, denn der Vorteil einer Strategie hängt von der Strategienwahl des Gegners ab. Zum Vergleich von zwei Strategien verwendet man das Konzept der paarweisen Dominanz

[15] Anmerkung Berninghaus: in makaberer Weise

Definition 7.6. Die Strategie $\sigma_i^0 \in \Sigma_i$ **dominiert** die Strategie $\sigma_i \in \Sigma_i \setminus \{\sigma_i^0\}$, wenn für alle $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ gilt

$$H_i(\sigma_{-i}, \sigma_i^0) \geq H_i(\sigma_{-i}, \sigma_i)$$

und mindestens ein $\sigma' \in \Sigma_{-i}$ existiert mit

$$H_i(\sigma'_{-i}, \sigma_i^0) > H_i(\sigma'_{-i}, > \sigma_i).$$

Die Dominanz einer Strategie definiert man allgemein wie folgt

Definition 7.7. Eine Strategie $\sigma_i^0 \in \Sigma_i$ heißt **dominant**, wenn sie jede andere Strategie $\sigma_i \in \Sigma_i \setminus \{\sigma_i^0\}$ dominiert.

Aus beiden Definitionen folgt, dass eine Strategie genau dann dominant ist, wenn sie alle weiteren Strategien des Spielers paarweise dominiert. Dominante und streng dominante Strategien unterscheiden sich lediglich darin, dass es Strategienkombinationen σ_{-i} geben kann, bei denen sich Spieler i durch die Wahl seiner dominanten Strategie im Vergleich zu den alternativen Strategien nicht echt verbessern kann.

Analog zur Definition der dominanten Strategien ist es möglich das Konzept der dominierten Strategien zu definieren

Definition 7.8.

a) Eine **Strategie** $\sigma_i \in \Sigma_i$ heißt **dominiert**, wenn mindestens eine Strategie $\sigma_i^0 \in \Sigma_i$ existiert, welche die Strategie σ_i dominiert.

b) Eine **Strategienkonfiguration** $\sigma \in \Sigma$ heißt **dominiert**, wenn wenigstens ein σ_i dominiert ist.

Es ist offensichtlich, dass dominante und dominierte Strategien sehr bedeutend für die Strategienwahl rationaler Spieler sind. Eliminiert man sukzessive dominierte Strategien, ist es durchaus möglich, dass sich neue Strategien als dominant herausstellen. Durch dieses Verfahren wird die strategische Situation oft vereinfacht. Anschließend liegt die Strategienwahl unter den rationalen Spielern nahe.

Wendet man die Eliminierung der dominierten Strategien auf das Beispiel 7.5. an, reduziert sich die Auszahlungstabelle für den Zeilenspieler USA wie folgt

		Japan
		N
USA	N	(2,-2)
	S	(1,-1)

Abbildung 8: Reduzierte Normalform Battle of the Sea (Berninghaus, 2006, S.21)

Für die USA ist in diesem reduzierten Spiel die streng dominante Strategie N. Als Lösung für einen rationalen Zeilenspieler sollte daher die Strategienkonfiguration (N,N) gewählt werden.

Berninghaus (2006) folgend sind die meisten Spiele nicht durch sukzessive Elimination dominierter Strategien lösbar. Dennoch ist die Existenz von Spielen mit dieser Eigenschaft sehr bedeutsam. Es besteht zumindest die Möglichkeit die Spielregeln so zu verändern, dass die vorliegende Spielsituation mit dem Konzept der Eliminierung dominierter Strategien lösbar ist. Folgendes berühmtes Beispiel in der Version nach Holler (2006) zeigt uns, dass das Lösungskonzept der Elimination dominierter Strategien nicht auf alle nichtkooperativen Spiele anwendbar ist, da keine dominanten Strategien existieren.

Beispiel 7.9. ***Battle of the Sexes***

> „Oskar und Tina treffen sich zufällig im Café. Sie unterhalten sich angeregt. Tina erweist sich als begeisterter Fußballfan und möchte am Abend unbedingt zum Pokalspiel ihres Vereins gehen, während Oskar mit Fußball überhaupt nichts im Sinn hat und dies auch zu verstehen gibt. Er ist ein überzeugter Kinogänger und möchte Tina überreden, gemeinsam den neusten Woody Allen Film anzuschauen, der heute Premiere hat. Sie läßt freilich erkennen, daß sie grundsätzlich nicht gerne ins Kino geht. Mitten im Gespräch bemerkt Oskar, daß er vor lauter Begeisterung einen wichtigen Vorstellungstermin fast vergessen hätte. Überstürzt verabschiedet er sich mit einem Kuß und meint noch: “Du bist einfach hinreißend - wir müssen uns heute abend unbedingt sehen.“ Tina stimmt begeistert zu. Zu spät bemerken beide, daß sie gar keinen Treffpunkt vereinbart und auch nicht ihre Adressen ausgetauscht haben. Wo sollen sie hingehen, um sich wieder zu sehen: Ins Fußballstadion oder ins Kino? Beide wissen, daß Tina lieber ins Stadion geht und Oskar lieber den Film anschaut.; wenn sie sich aber verfehlten, dann würde ihnen jede Freude am Kino oder am Pokalspiel vergehen.“ (Holler, 2006, S.11)

Die Strategienmengen beider Spieler sind demnach gegeben durch $\Sigma_i = \{K, F\}$ mit den Strategien „Kino“ (K) und „Fußball“ (F). Die Auszahlungsfunktionen werden durch folgende Auszahlungstabelle dargestellt

	Tina	
	K	F
Oskar K	(2,1)	(-1,-1)
F	(-1,-1)	(1,2)

Abbildung 9: Normalform Battle of the Sexes (Berninghaus, 2006, S.23)

Aus den Werten der Auszahlungstabelle wird deutlich, dass beide die Strategienkonfiguration (F,K) und (K,F) meiden werden und (F,F) und (K,K) von beiden Spielern bevorzugt, aber unterschiedlich bewertet werden. Oskar favorisiert (K,K) und Tina (F,F). Die Auszahlung hängt daher davon ab, welche Strategie der andere wählt. Die bisherigen Lösungskonzepte können daher nicht angewandt werden. Die Kombinationen (K,K) und (F,F) besitzen allerdings eine wichtige Stabilitätseigenschaft, denn weicht ein Spieler einseitig von dieser Konfiguration ab, verschlechtert er seine Auszahlung. Im umgekehrten Fall besteht für einen Spieler die Möglichkeit durch einseitiges Abweichen von den Strategienkombinationen (F,K) und (K,F) seine Auszahlung zu erhöhen. Aus diesem Grund werden die Konfigurationen (K,K) und (F,F) zunächst als mögliche Kandidaten für ein weiteres Lösungskonzept festgehalten. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass diese Strategienkonfigurationen Beispiele für das meist verwendete Lösungskonzept von Normalformspielen sind. In der Spieltheoretischen Literatur bezeichnet man dieses Konzept als Nash-Gleichgewicht.

(Berninghaus, 2006, S.20ff. /Holler, 2006, S.11)

7.1.3 Nash-Gleichgewicht

Ein Lösungskonzept ist zum Teil wenig hilfreich, wenn für die meisten Spiele keine Lösung angegeben werden kann, wie zum Beispiel im Konzept der strengen Dominanz. Im Folgenden wird die Existenz eines Nash-Gleichgewichtes unter möglichst allgemeinen Bedingungen nach Berninghaus (2006) untersucht. John F. Nash entwickelte ein grundlegendes Lösungskonzept für nichtkooperative Spiele. Es stellt eine Verallgemeinerung des Gleichgewichtkonzeptes des französischen Mathematikers Cournot dar, das er bereits im 19. Jahrhundert für die Oligopoltheorie entwickelt hat. Ein Spezialfall ist das Minimax-Prinzip von J.v. Neumann, dass in 7.1.5 kurz angeführt wird.

Definition 7.10. Eine Strategienkonfiguration $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ heißt **Nash-Gleichgewicht**, wenn für jede Strategie $\sigma_i \in \Sigma_i$ eines jeden Spielers $i \in N$ gilt

$$H_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq H_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$$

Bemerkung 7.11. Hier ist besonders deutlich zu erkennen, dass jeder Spieler nur seine eigenen Strategien, bei gegebener Strategienkonfiguration seiner Mitspieler, beurteilt.

Um nun eine Strategienkonfiguration $\sigma \in \Sigma$ auf die Nash-Eigenschaft hin zu überprüfen, muss für jeden Spieler einzeln untersucht werden, ob ein einseitiges gewinnbringendes Abweichen zu einer alternativen Strategie möglich ist. Ist dies nicht möglich und geht man von einem Nash-Gleichgewicht aus, so besteht für keinen Spieler ein Grund, von seiner Gleichgewichtsstrategie abzuweichen.

Die Strategienwahl ist für Spieler i somit optimal, denn er kann bei gegebenen Entscheidungen der anderen Spieler keinen höheren Gewinn erzielen. Berninghaus (2006) fügt weiter hinzu, dass alle Nicht-Gleichgewichte definitionsgemäß selbstdestabilisierend sind. Würde ein Verhalten außerhalb des Gleichgewichtes erwartet, so würde der Spieler, für den es sich lohnt, von seiner Strategie abweichen.

Beim Battle of the Sexes-Spiel (Beispiel 7.9.) gibt es zwei Nash-Gleichgewichte: (K,K) und (F,F). Dieses Beispiel zeigt, dass die Eindeutigkeit nicht charakteristisch für Nash-Gleichgewichte ist. Spiele mit mehrfachen Gleichgewichten können unter Umständen für die einzelnen Spieler problematisch sein, da sie nicht wissen, welche Gleichgewichtsstrategie die anderen wählen.

Nun stellt sich die Frage, in welcher Beziehung das Nash-Konzept zu den vorangestellten Lösungskonzepten der strengen Dominanz und der Eliminierung dominierter Strategien steht.

Satz 7.12.

a) Eine Lösung in streng dominanten Strategien ist eindeutiges Nash-Gleichgewicht des Spiels.

b) Eine (eindeutige) Lösung, die durch Eliminierung dominierter Strategien erreicht wurde, ist ein Nash-Gleichgewicht.

Beweisskizze

a) Folgt sofort aus der Definition einer streng dominanten Strategie.

b) Angenommen σ^* ist durch sukzessive Eliminierung dominierter Strategien entstanden, aber kein Nash-Gleichgewicht. Dann existiert mindestens ein Spieler i' und eine Strategie σ_i' mit der Eigenschaft $H_{i'}(\sigma^*_{-i'}, \sigma'_{i'}) > H_{i'}(\sigma^*_{-i}, \sigma^*_{i'})$. Dann kann aber $\sigma^*_{i'}$ definitionsgemäß nicht durch Eliminierung dominierter Strategien entstanden sein. $\diamond$

Die bisher betrachteten Dominanz-Konzepte in den Abschnitten 7.1.1 und 7.1.2 sind Spezialfälle des Nash-Konzeptes, die allerdings nicht äquivalent sind. Die obige Implikationsbeziehung in Satz 7.12.a ist nicht umkehrbar. Ein Gegenbeispiel liefert das Battle of the Sexes-Spiel (Beispiel 7.9.). Dort ist, wie wir bereits gesehen haben, ein Nash-Gleichgewicht keine Lösung in streng dominanten Strategien. Ebenso ist die Umkehrung der Implikation in Satz 7.12.b nicht gültig.

Beispiel 7.13. Ein mögliches Gegenbeispiel ist das folgende einfache 2×2-Spiel in Normalform. Seine Auszahlungstabelle lautet

		Spieler 2	
		X_2	Y_2
Spieler 1	X_1	(1,1)	(1,1)
	Y_1	(0,0)	(1,1)

Abbildung 10: Auszahlung 2×2 Spiel (Berninghaus, 2006, S.28)

In diesem Spiel ist die Strategienkombination $\sigma^* = (Y_1, Y_2)$ ein Nash-Gleichgewicht. Allerdings ist auch die Strategie Y_1 dominiert. Nash-Gleichgewichte können daher auch dominierte Strategien enthalten, die durch Eliminierung dominierter Strategien als mögliche Lösung entfallen können.

Nun stellt sich die Frage der Existenz von Nash-Gleichgewichten. Dieses Problem stand in den fünfziger Jahren des letzten Jahrhunderts im Mittelpunkt der spieltheoretischen Forschungen. Man stellte fest, dass auch das oben definierte Nash-Konzept keine Lösungsfunktion für alle nichtkooperativen Spiele darstellte. Ein berühmtes Beispiel[16] ist das folgende.

[16] hier in der Version nach Holler (2006)

Beispiel 7.14. ***Matching Pennies***

Zwei Spieler nennen gleichzeitig Kopf (K) oder Zahl (Z). Stimmen die Angaben der beiden überein, gewinnt Spieler 1 eine Geldeinheit - anderenfalls gewinnt Spieler 2. Die möglichen Auszahlungen sind in der folgenden Spielmatrix angegeben.

	K	Z
K	(1,0)	(0,1)
Z	(0,1)	(1,0)

Abbildung 11: Matching Pennies (Berninghaus, 2006, S.29)

Überprüft man die einzelnen Strategienkonfigurationen, ist es in jeder Kombination wenigstens für einen der beiden Spieler gewinnbringend eine andere Strategie zu wählen. Daher existiert kein Nash-Gleichgewicht.

Allerdings konnte das Problem der Nicht-Existenz eines Nash-Gleichgewichtes durch eine Erweiterung und Verallgemeinerung des Konzeptes der reinen Strategien gelöst werden. Man führte die in 5.2 bereits angesprochenen und in 6.1 behandelten gemischten Strategien ein. Da diese eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über den $\sigma \in \Sigma$ induzieren, soll die Gewinnfunktion aus 5.3 ebenfalls angepasst und allgemeiner über gemischten Strategienkombinationen $s = (s_1, ..., s_n) \in S := S_1 \times ... \times S_n$ als Erwartungswerte der $H_i(.)$ definiert werden.

Definition 7.15. Gegeben sei für jeden Spieler i mit i = 1,...,n eine gemischte Strategie $s_i = (p_{i1}, ..., p_{im_i})$ mit $m_i :=\mid \Sigma_i \mid$. Die **erwartete Auszahlung** $u_i(s)$ für Spieler i bei gegebener Strategienkonfiguration $s = (s_1, ..., s_n)$ ist definiert durch

$$u_i(s) := \sum_{j_1=1}^{m_1} ... \sum_{j_n=1}^{m_n} p_{1j_1} \cdot ... \cdot p_{nj_n} H_i(\sigma_{1j_1}, ..., \sigma_{nj_n}).$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit und um die Notationen nicht unnötig zu überlasten, werde ich allerdings im weiteren Verlauf dieser Arbeit, unabhängig davon, ob die Strategienkonfigurationen auf S oder Σ definiert sind, dasselbe Symbol $H_i(.)$ für die Gewinnfunktion verwenden. Ersetze daher den Ausdruck in Definition 7.15. $u_i(s)$ durch $H_i(s)$.

Überträgt man die Definition des Nash-Gleichgewichtes auf Spiele mit gemischten Strategien, ergibt sich folgende Definition.

Definition 7.16. Eine Strategienkonfiguration $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ heißt **Nash-Gleichgewicht**, wenn für jede gemischte Strategie $s_i \in S_i$ eines jeden Spielers $i \in N$ gilt:

$$H_i(s_{-i}^*, s_i^*) \geq H_i(s_{-i}^*, s_i).$$

Aufgrund der Linearität von H_i in den durch s_i festgelegten Wahrscheinlichkeiten folgt aus der obigen Gleichgewichtsdefinition, dass für alle reinen Strategien $\sigma_i \in \Sigma_i$ für jeden Spieler i gilt

$$H_i(s_{-i}^*, s_i^*) \geq H_i(s_{-i}^*, \sigma_i).$$

Gibt es also im Raum der gemischten Strategien S_i keine bessere Antwort auf s_{-i}^*, dann gibt es diese auch nicht im Raum der reinen Strategien.

Ist jedoch s' eine gemischte Strategienkonfiguration mit der Eigenschaft

$H_i(s'_{-i}, s'_i) \geq H_i(s'_{-i}, \sigma_i)$ für alle reinen Strategien $\sigma_i \in \Sigma_i$ eines Spielers i, kann es keine bessere Antwort s_i auf s'_{-i} als s'_i in S_i geben. Diese Tatsache beruht ebenfalls auf der Linearität, da es bei einer existierenden besseren Antwort mindestens eine reine Strategie unter allen s_i geben müsste, die besser ist als s'_i. Somit bildet s' ein Nash-Gleichgewicht und das Problem der Nicht-Existenz eines Nash-Gleichgewichtes in reinen Strategien ist lösbar.

Angewandt auf das Matching Pennies-Spiel (Beispiel 7.14.), das in den reinen Strategien kein Gleichgewicht besitzt, lauten die erwarteten Auszahlungen für Spieler 1 und 2 im Nash-Gleichgewicht[17] $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ (mit $s_1^* = (p^*, 1-p^*)$ und $s_2^* = (q^*, 1-q^*)$ sowie $p^*, q^* \in (0,1)$)

$$H_1(s_1^*, s_2^*) = p^* H_1(K, s_2^*) + (1 - p^*) H_1(Z, s_2^*)$$

$$H_2(s_1^*, s_2^*) = q^* H_2(s_1^*, K) + (1 - q^*) H_2(s_1^*, Z).$$

Zunächst soll die Situation von Spieler 1 analysiert werden. Angenommen es gilt $H_1(K, s_2^*) > H_1(Z, s_2^*)$ (oder aber $H_1(K, s_2^*) < H_1(Z, s_2^*)$.
Dann folgt aus der Definition des Nash-Gleichgewichtes für gemischte Strategien, dass $H_1(s_1^*, s_2^*) = p^* H_1(K, s_2^*) + (1 - p^*) H_1(Z, s_2^*) < H_1(K, s_2^*)$
(oder $H_1(s_1^*, s_2^*) < H_1(Z, s_2^*)$) für $0 < p^* < 1$. Dies widerspricht allerdings der Nash-Eigenschaft der Strategie s_i^*.

[17] Ich verwende hier nach Berninghaus (2006) die Konvention, entartete gemischte Strategien nicht durch den entsprechenden Wahrscheinlichkeitsvektor sondern durch das Symbol der reinen Strategien auszudrücken. Dies bedeutet, dass „K“ anstelle von (0,1) für die gemischte Strategie, mit Wahrscheinlichkeit 1 die reine Strategie K zu spielen, verwendet wird.

Daher muss für das Matching Pennies-Spiel in einem Nash-Gleichgewicht mit gemischten Strategien die Gleichheit

$$H_1(K, s_2^*) = H_1(Z, s_2^*) \Leftrightarrow q^* \cdot 1 + (1 - q^*) \cdot 0 = q^* \cdot 0 + (1 - q^*) \cdot 1$$

gelten.

Das bedeutet nichts anderes, als dass die Wahl für Spieler 1 zwischen K und Z gleichgültig ist.

Analog gilt damit für Spieler 2

$$H_2(s_1^*, K) = H_2(s_1^*, Z) \Leftrightarrow p^* \cdot 0 + (1 - p^*) \cdot 1 = p^* \cdot 1 + (1 - p^*) \cdot 0.$$

Gleichsetzen beider Gleichungen liefert schließlich $p^* = \frac{1}{2} = q^*$. Die gemischte Strategienkonfiguration $s^* = ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ besitzt Nash-Eigenschaft, denn für Spieler 1 (Zeilenspieler) gilt bei gegebenem $s_2^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ für alle gemischten Strategien $s_1 = (p, 1-p) \in S_1$ $H_1(s_1, s_2^*) = pH_1(K, s_2^*) + (1-p)H_1(Z, s_2^*)$ wegen $H_1(K, s_2^*) = H_1(Z, s_2^*)$. Spieler 1 kann somit die erwartete Auszahlung nicht durch Abweichung erhöhen. Für Spieler 2 (Spaltenspieler) sieht die Situation ähnlich aus. Ist $s^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ für alle gemischten Strategien $s_2 = (q, 1-q) \in S_2$ gegeben, gilt
$H_2(s_1^*, s_2) = qH_2(s_1^*, K) + (1-q)H_2(s_1^*, Z) = H_2(s_1^*, s_2^*)$ wegen $H_2(s_1^*, K) = H_2(s_1^*, Z)$ und auch Spieler 2 kann seine erwartete Auszahlung nicht durch Abweichen erhöhen. Folglich wählen beide Spieler im Nash-Gleichgewicht des Matching Pennies-Spiels beide Seiten der Münze mit gleicher Wahrscheinlichkeit und der erwartete Gewinn beträgt $\frac{1}{2}$.

(Berninghaus, 2006, S.24ff. / Holler, 2006, S. 57ff.)

Abbildung der besten Antwort

Am Beispiel des Matching-Pennies-Spiels wurde gezeigt, wie man das Problem der Nicht-Existenz von Nash-Gleichgewichten in reinen Strategien lösen kann. Dieses Problem soll nun formal verallgemeinert werden.

Eine wichtige Rolle bei der Untersuchung der Struktur eines Spiels und dem Nachweis eines Nash-Gleichgewichtes spielt die *Menge der besten Antworten*. Nach Holler (2006) formuliert jeder Spieler i im Vorfeld bestimmte Erwartungen, welche Strategien s_{-i} die anderen Spieler wählen. Dazu betrachtet Spieler i die Strategienkonfigurationen s_{-i} seiner Mitspieler und überlegt sich, welche seiner Strategien $s_i \in S_i$ den größten Nutzen $H_i(s)$ liefert, wenn die anderen Spieler ihre Strategie beibehalten. Dabei ist es nicht ausgeschlossen, mehrere auch gleich gute Antworten zu finden.

Definition 7.17. Die **Reaktionsabbildung** $r_i(s_{-i})$ beschreibt die Menge der besten Antworten von Spieler i. Wählen die anderen Mitspieler die Konfiguration s_{-i}, ist $\hat{s}_i$ die beste Antwort für Spieler i und es gilt $\hat{s}_i \in r_i(s_{-i})$. Handelt es sich bei der Reaktionsabbildung um eine Funktion, spricht man von einer **Reaktionsfunktion** und es gilt

$$r_i(s_{-i}) = \{\widehat{s}_i \in S_i \mid H_i(\widehat{s}_i, s_{-i}) \geq H_i(s_i, s_{-i}) \, \forall s_i \in S_i\}$$

Es ist durchaus möglich für jede beliebige Strategienkonfiguration s für alle Spieler die besten Antworten $r_i(s_{-i})$ zu finden.

Definition 7.18. Die **Abbildung** r **der besten Antwort** ist die mengenwertige Funktion, deren Funktionswert das kartesische Produkt der Funktionswerte der r_i für i = 1,...,n aus der obigen Definition ist. Es gilt

$$r : S \rightarrow \mathcal{P}(S_1) \times ... \times \mathcal{P}(S_n)$$

mit den Funktionswerten $r(s) := (r_1(s_{-1}), ..., r_n(s_{-n}))$.

Die Abbildung $r(s) := (r_1(s_{-1}), ..., r_n(s_{-n}))$ gibt nun als Vektor der Reaktionsabbildungen die besten Antworten aller Spieler auf jede beliebige Konfiguration s an. Befindet sich ein solcher Vektor im Nash-Gleichgewicht, müssen die Erwartungen der Spieler über die Strategienwahl der Mitspieler übereinstimmen. Die besten Antworten $r(s)$ stimmen jedoch im allgemeinen nicht mit der unterstellten Konfiguration s überein. Demnach gilt $s \notin r(s)$ und die Erwartungen stimmen nicht mit dem tatsächlichen Verhalten $r(s)$ überein. Wenn die den Mitspielern unterstellten Strategien s_i allerdings ebenso beste Antworten auf die Strategien der anderen Spieler sind, erfüllen sich die Erwartungen aller Spieler. In diesem Fall liegen wechselseitig beste Antworten der Spieler vor und es gilt $s^* \in r(s^*)$. Mit anderen Worten ausgedrückt, bedeutet dies nicht anderes, als dass jeder Spieler seine optimale Strategie wählt und wieder s^* resultiert.

Mit Hilfe der Abbildung der besten Antworten entsteht nun eine äquivalente Formulierung des Nash-Gleichgewichtes.

Satz 7.19. Eine Strategienkonfiguration $s^* \in S$ ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn $s^* \in r(s^*)$ gilt.

Beweis $\Rightarrow$ Sei s^* ein Nash-Gleichgewicht. Dann gilt nach der Definition des Nash-Gleichgewichtes $H_i(s^*) \geq H_i(s_i, s^*_{-i})$ für alle $s_i \in S_i$ und alle i = 1,...,n. Hieraus folgt dann $H_i(s^*_{-i}, s^*_i) \geq H_i(s^*_{-i}, s_i)$ für alle i. Nach der Definition der $r_i(s^*_{-i})$ folgt nun $s^* \in r(s^*)$.

$\Leftarrow$ Sei $s^* \in r(s^*)$, d.h. $s_i^* \in r_i(s_{-i}^*)$ gilt für alle i = 1,...,n. Aus der Definition der besten Antwortfunktion $r_i(s_{-i}^*)$ folgt, dass $H_i(s_{-i}^*, s_i^*) \geq H_i(s_{-i}^*, s_i)$ für alle $s_i \in S_i$ und alle i gilt. Dies ist aber wiederum nichts anderes als die Definition des Nash-Gleichgewichtes. $\diamond$

Somit gilt folgender Zusammenhang

$$s^*\, ist\, ein\, Nash-Gleichgewicht \Leftrightarrow s^*\, ist\, beste\, Antwort\, auf\, sich\, selbst.$$

Die Eigenschaft eines Vektors beste Antwort auf sich selbst zu sein, kann formal mit Hilfe der Fixpunkteigenschaft[18] beschrieben werden. Mit anderen Worten: s^* ist genau dann ein Fixpunkt der besten Antwort Funktion r(.), wenn s^* ein Nash-Gleichgewicht ist.

Bemerkung 7.20. Man spricht von einem strikten Nash-Gleichgewicht, wenn sich ein Spieler, bei gegebener Gleichgewichtsstrategie der anderen, durch die Wahl einer anderen Strategie verschlechtern würde. Verschlechtert oder verbessert sich aber ein Spieler durch die Abweichung nicht, liegt ein schwaches Nash-Gleichgewicht vor.

(Holler, 2006, S. 58 / Schlee, 2004, S. 20f)

Existenz eines Nash-Gleichgewichtes

Zur weiteren Formalisierung der Problematik der Existenz definiert man nach Berninghaus (2006) die Beste-Antwort-Korrespondenz[19].

Definition 7.21. Es seien M, N Mengen. Dann wird K eine **Korrespondenz** aus M in N (bzw. zwischen M und N) genannt, wenn $K \subseteq M \times N$ ist. Eindeutige Korrespondenzen heißen auch Abbildungen oder Funktionen.

Definition 7.22. Die **Beste-Antwort-Korrespondenz** des Spiels $G = \{\Sigma_1, ..., \Sigma_n; H_1, ..., H_n; N\}$ ist gegeben durch die Funktion $g_i : \Sigma_{-i} \rightarrow \Sigma_i$ von Spieler i mit
$g_i(\sigma_{-i}) := \{\sigma_i^* \in \Sigma_i \mid \forall \sigma_i \in \Sigma_i : H_i(\sigma_{-i}, \sigma_i^*) \geq H_i(\sigma_{-i}, \sigma_i\}$.

Mit anderen Worten weist die Beste-Antwort-Korrespondenz jedem Strategienvektor in Σ_{-i} eine Teilmenge von Σ_i zu. Die Interpretation der Strategienmengen Σ_i sei

[18] Punkte des Definitionsbereichs einer gegebenen Funktion werden auf sich selbst abgebildet. Für eine Funktion f gilt dann $f(x) = x$ und x ist Fixpunkt der Funktion.

[19] Die weiteren benötigten Eigenschaften von Korrespondenzen befinden sich in Anhang B.

zu diesem Zeitpunkt noch offen. Die σ_i können daher hier sowohl reine als auch gemischte Strategien sein.

Die Menge $g_i(\sigma_{-i})$ setzt sich aus denjenigen Strategien von Spieler i zusammen, die seinen Gewinn bei gegebenem σ_{-i} maximieren. Berninghaus (2006) folgend wird an dieser Stelle noch implizit angenommen, dass wenigstens ein Maximum von $H_i(\sigma_{-i}, \cdot)$ zu jedem σ_{-i} existiert. Im weiteren Verlauf wird allerdings deutlich, dass diese Annahme für die betrachteten Spiele keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Im Folgenden sollen die Beste-Antwort-Korrespondenzen auf dem Raum aller Strategienkonfigurationen Σ definiert werden. Zunächst allerdings definiere als Zwischenschritt $f_i(\sigma) := g_i(\sigma_{-i})$.

Definition 7.23. Die **globale Beste-Antwort-Korrespondenz** $F : \Sigma \to \Sigma$ ist gegeben durch $F(.) := (f_1(.), ..., f_n(.))$.

Aus der obigen Charakterisierung von Nash-Gleichgewichten kann man daher folgende Äquivalenz formulieren

Satz 7.24. σ^* ist ein Nash-Gleichgewicht $\Leftrightarrow \forall i : \sigma_i^* \in f_i(\sigma^*) \Leftrightarrow \sigma^* \in F(\sigma^*)$

Beweis

a) Die zweite Äquivalenzbeziehung folgt direkt aus der Definition der globalen Beste-Antwort-Funktion F(.).

b) Beweis der ersten Äquivalenzbeziehung.

$\Rightarrow$Sei σ^*ein Nash-Gleichgewicht, dann gilt für alle i $H_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i^*) \geq H_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i)$ für verschiedene Strategien $\sigma_i \in \Sigma_i$. Folglich gilt auch $\sigma_i^* \in f_i(\sigma^*)$.

$\Leftarrow$Gilt für alle i: $\sigma_i^* \in f_i(\sigma^*)$, dann folgt aus der Definition der $f_i(.)$:
$H_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i^*) = \max_{\sigma_i \in \sum_i} H_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i)$. Folglich ist σ^*ein Nash-Gleichgewicht. $\diamond$

Mit Hilfe dieses Satzes ist es möglich die Nash-Gleichgewichte eines Spiels G mit den Fixpunkten der globalen Beste-Antwort-Korrespondenz F(.) zu identifizieren. Hiermit wird das Problem der Existenz von Nash-Gleichgewichten auf die Existenz von Fixpunkten für eine gegebene Abbildung zurückgeführt. Nach Berninghaus (2006) ist das Fixpunktproblem in der Mathematik bereits auf unterschiedlichen Allgemeinheitssstufen gelöst worden. Daher ist es möglich von diesen Resultaten, den so genannten Fixpunktsätzen, zu profitieren. Aus diesem Grund formuliert man spezielle Einschränkungen an das Spiel G, die wiederum spezielle Eigenschaften der Beste-Antwort-Korrespondenz einschließen.

Satz 7.25. Existenz eines Nash-Gleichgewichtes[20]

Sei G ein Spiel in Normalform. Gelten für jeden Spieler $i \in N$ folgende Eigenschaften:

1. Der Strategienraum Σ_i ist eine kompakte und konvexe Teilmenge eines endlich-dimensionalen Euklidischen Raumes.
2. Die Gewinnfunktion $H_i : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
3. $\forall \sigma_{-i} : H_i(\sigma_{-i}, \cdot) : \Sigma_i \rightarrow \mathbb{R}$ ist quasi-konkav in σ_i.

dann existiert ein Nash-Gleichgewicht für das Spiel G.

Beweis Nach Holler (2006) findet sich ein ausführlicher Beweis in Nikaido (1970) oder Friedmann (1986)[21]. Im Folgenden wird eine Beweisskizze nach Berninghaus (2006) gegeben, die sich auf die Grundidee beschränkt. Wie bereits bekannt, existiert genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn die Abbildung der besten Antwort einen Fixpunkt hat. Der Beweis besteht folglich darin, dass die obigen Annahmen die Gültigkeit der Annahmen des Kakutanischen Fixpunktsatzes[22] für die Beste-Antwort-Korrespondenz $F : \Sigma \rightarrow \Sigma$ eines Normalformspiels G einschließen. Σ ist als endliches kartesisches Produkt kompakter und konvexer Mengen der Σ_i wieder kompakt und konvex. Des Weiteren ist zu zeigen, dass aus der Quasi-Konkavität von $H_i(\sigma_{-i}, .)$ die Konvexwertigkeit von F(.) folgt. Man beweist dies, indem man zeigt, dass $g_i(\sigma_{-i})$ konvexe Mengen sind. Letztlich bleibt zu zeigen, dass F(.) oberhalb-halbstetig ist. Dazu sei eine Folge von Strategienkonfigurationen $\{\sigma^k\}_k$ mit $\underset{k\rightarrow\infty}{lim} \sigma^k = \sigma$ und eine Folge $\{\sigma'^k\}_k$ mit $\sigma'^k \in F(\sigma)$ und $\underset{k\rightarrow\infty}{lim} \sigma'^k = \sigma'$gegeben. Dann zeigt man, dass $\sigma' \in F(\sigma)$ gilt. Somit erfüllen Σ und F(.) alle Annahmen des Kakutanischen Fixpunktsatzes und folglich existiert ein Nash-Gleichgewicht σ^* für das Spiel G. $\diamond$

Die Stetigkeit der Gewinnfunktionen ist keine starke Einschränkung. Man fordert außerdem die Quasi-Konkavität eher aus beweistechnischen Gründen, da sie die Konvexität der Menge der besten Antworten garantiert und somit $F(\sigma)$ ebenfalls konvex ist. Für die Anwendung des Kakutanischen Fixpunktsatzes stellt die Konvexität eine wichtige Voraussetzung dar. Die Annahme der Konvexität der individuellen Strategienmengen Σ_i ist jedoch nicht einfach übertragbar. Im bisherigen Verlauf wurden immer endliche Strategienmengen vorausgesetzt. Allerdings sind endliche Mengen

[20] Alle in diesem Satz angesprochenen mathematischen Konzepte sind in Anhang A definiert

[21] Friedmann, J.W. (1986). Game Theory with Application to Economics. Oxford University Press: Oxford.
Nikaido, H. (1970). Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics. North Holland: Amsterdam.

[22] siehe Anhang B

nicht konvex. Deshalb scheint der Existenzsatz auf den ersten Blick keine Bedeutung für eine Vielzahl der Spiele zu haben.

Mit der Einführung des Konzepts der gemischten Strategien, gewinnt der Existenzsatz für Nash-Gleichgewichte aber wieder an Bedeutung. Dazu setzt man die gemischte Erweiterung eines Normalformspiels $G_s = \{S_1, ..., S_n; H_1, ..., H_n; N\}$ voraus, die sich von dem ursprünglich zugrunde liegenden Spiel nur dahingehend unterscheidet, dass die Strategienmengen aus gemischten Strategien bestehen und die Gewinnfunktionen ebenfalls von Σ_i auf S_i erweitert werden.

Satz 7.26. Die gemischte Erweiterung G_s eines Normalformspiels G erfüllt alle Annahmen des Existenzsatzes für Nash-Gleichgewichte.

Beweisskizze Die folgende Beweisskizze nach Berninghaus (2006) ist in drei Teilschritte untergliedert.

1. Die Mengen S_i sind konvexe Teilmengen eines Euklidischen Raumes. Betrachtet man beliebige Strategien $s', s'' \in S_i$, dann gilt für die $s_i(\lambda) := \lambda s'_i + (1-\lambda)s''_i$, wobei $\lambda \in [0,1]$, mit $s'_i = \{p'_{ij}\}_j$,$s''_i = \{p''_{ij}\}_j$ und $p_{ij}(\lambda) = \lambda p'_{ij} + (1-\lambda)p''_{ij}$, dass

$$\sum_h p_{ih}(\lambda) = \lambda \sum_h p'_{ih} + (1-\lambda) \sum_h p''_{ih} = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

   und $s_i(\lambda) \in S_i$. Aus der Voraussetzung $p_i \geq 0$ und $\sum_h p_{ih} = 1$ folgt, dass die S_i abgeschlossen und beschränkt, folglich kompakt sind.

2. Die $H_i(s)$ sind Erwartungswerte mit Wahrscheinlichkeitsgewichten $\pi(\sigma) := p_{1j_1}, ..., p_{nj_n}$. Die erwarteten Gewinne sind Linearkombinationen der $H_i(\sigma)$ mit Koeffizienten $\pi(\sigma)$. Aufgrund der Stetigkeit der $H_i(\sigma)$ im Existenzsatz sind diese wiederum stetig in den Wahrscheinlichkeitsgewichten $\pi(\sigma)$.

3. Die Quasi-Konkavität von $H_i(s_{-i}, .)$ folgt aus der Konkavität der Gewinnfunktion $H_i(s_{-i}, .)$, die hingegen aus der Linearität folgt. Deshalb ist $H_i(s_{-i}, \alpha s'_{-i} + \beta s''_i) = \alpha H_i(s_{-i}, s'_i) + \beta H_i(s_{-i}, s''_i)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zu zeigen. Dazu verwendet man die Interpretation, dass die $H_i(s)$ Erwartungswerte sind. Dies bedeutet nichts anderes als, dass diese Erwartungswerte Summen der Ausdrücke $\pi(\sigma) \cdot C_i(\sigma)$ über alle $\sigma \in \Sigma$ sind. Hierbei stellen die $C_i(\sigma)$ die Auszahlungen von Spieler i bei der reinen Strategienkonfiguration σ dar. Für $s'_i = \{p'_{ij_i}\}$ und $s''_i = \{p_{ij_i}\}$ ergibt sich dann die gewünschte

Linearität.

$$\begin{aligned}H_i(s_{-i}, \alpha s'_{-i} + \beta s''_i) &= \sum_{j_1} ... \sum_{j_n} [\pi_{-i}(.)(\alpha p'_{ij_i} + \beta p''_{ij_i}) C_i(.)] \\ &= \sum_{j_1} ... \sum_{j_n} [\pi_{-i}(.)\alpha p'_{ij_i} C_i(.)] + \\ &\quad \sum_{j_1} ... \sum_{j_n} [\pi_{-i}(.)\beta p''_{ij_i} C_i(.)] \\ &= \alpha H_i(s_{-i}, s'_i) + \beta H_i(s_{-i}, s''_i)\end{aligned}$$

◇

Folgerung 7.27. Jedes Spiel in Normalform G hat ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Diese Folgerung ist nach Berninghaus (2006) aus unterschiedlichen Gründen bezeichnend.

1. Für so genannte degenerierte gemischte Gleichgewichtsstrategien lässt es den Spezialfall der reinen Strategien zu.
2. Die Existenzbedingungen sind nur hinreichend und garantieren die Existenz eines Nash-Gleichgewichtes. „Es ist aber durchaus möglich, dass wir Spiele [...] finden, welche die Bedingungen [...] nicht erfüllen und dennoch ein Nash-Gleichgewicht aufweisen.“(Berninghaus, 2006, S.40)
3. Der Existenzsatz und die anschließende Folgerung sind reine Existenzsätze, die keine Auskunft über die Anzahl der existierenden Gleichgewichte geben. „Für fast alle Spiele [23] ist die Anzahl der Gleichgewichtspunkte ungerade, was allgemein für Fixpunktaussagen gilt.“ (Berninghaus, 2006, S.40)
   Beispielsweise besitzt das Battle of the Sexes-Spiel (Beispiel 7.9.) mehrere Gleichgewichte. In solchen Spielen stehen den Spielern mehrere Gleichgewichtsstrategien zur Verfügung und jeder muss genau überlegen, welche Gleichgewichtsstrategien die anderen Mitspieler wählen.

(Berninghaus, 2006, S.37f.)

[23] Wählt man für einen gegebenen, endlichen Strategienraum die Auszahlungen zufällig, gemäß eines stetigen Wahrscheinlichkeitsmaßes, aus, so würde man mit Wahrscheinlichkeit Null ein Spiel mit gerader Anzahl von Wahrscheinlichkeiten wählen.

Eindeutigkeit eines Nash-Gleichgewichtes

Wie bereits in einigen Beispielen deutlich wurde, ist es möglich, dass mehrere Nash-Gleichgewichte als Lösung in Frage kommen können. Holler (2006) betont, dass der Existenzsatz zwar unter relativ allgemeinen Bedingungen mindestens ein Gleichgewicht garantiert, aber die Forderung nach der Eindeutigkeit erheblich stärker ist. „Eindeutigkeit kann nur unter weit restriktiveren und zudem meist ökonomisch wenig sinnvollen Bedingungen sichergestellt werden.“ (Holler, 2006, S.74). Dies ist auch ein Grund, weshalb ich hier auf die formale Darstellung nicht näher eingehe. Ich beschränke mich auf die Untersuchung möglicher Refinements, um später praktisch Gleichgewichte finden zu können.

Für den Fall, dass mehrere Gleichgewichte existieren, kann man durch Verfeinerung des Lösungskonzeptes versuchen einige Gleichgewichte auszuschließen.

7.1.4 Refinements des Nash-Gleichgewichtes

Die Verfeinerungen des Nash-Gleichgewichtes sind nach Rieck (2006) wichtige Hilfsmittel, die insbesondere in der Anwendung der Spieltheorie eine bedeutende Rolle spielen. Sie stellen sich nach Güth (1992) die Aufgabe durch strengere Anforderungen an die Lösung diejenigen Gleichgewichtspunkte auszuschließen, die irrational sind. Einige Konzepte sind darauf ausgerichtet in den Normalformspielen absurde Gleichgewichtspunkte herauszufinden und andere wiederum versuchen dies für alle Spiele in Extensivform[24]. Allerdings bedeutet die Verfeinerung nicht, dass eine eindeutige Lösung aus der Menge der Gleichgewichtspunkte ausgewählt wird.

Perfekte Gleichgewichte

Dieser Abschnitt basiert nach Berninghaus (2006) auf Arbeiten von Selten. Da das Nash-Konzept nicht für alle Spiele in Normalform eine eindeutige Lösung bietet, sucht man nach Möglichkeiten des Ausschlusses und fordert Stabilität gegenüber geringer Änderungen. Man nimmt an, dass die Spieler Fehler machen können. Vielleicht wählen sie „'mit zitternder Hand' nicht immer die beabsichtigte Strategie, sondern machen möglicherweise - wenn auch mit geringer Wahrscheinlichkeit - einen Fehler und wählen irgendeine Strategie.“ (Holler, 2006, S.104)

Dieses Konzept wird im folgenden als perfektes Gleichgewicht bezeichnet, das allgemein ausgedrückt seine Gleichgewichtseigenschaften auch in einem „gestörten Spiel“ bewahrt. Bleibt ein Gleichgewicht selbst bei einer sehr kleinen Fehlerwahrscheinlichkeit nicht erhalten, bezeichnet man es als nicht (trembling-hand) perfekt. Zur

[24] siehe dazu Kapitel 7.2

Formalisierung werden noch weitere Vorbereitungen benötigt. Zunächst jedoch veranschaulicht ein Beispiel die Situation.

Beispiel 7.28. Die Auszahlungsmatrix eines einfachen 2×2-Spiel sei folgendermaßen gegeben

		Spieler 2	
		σ_{21}	σ_{22}
Spieler 1	σ_{11}	(0,100)	(0,100)
	σ_{12}	(-10,-10)	(40,40)

Abbildung 12: Normalform einfaches 2×2-Spiel (Berninghaus, 2006, S.54)

Dieses Spiel besitzt zwei Nash-Gleichgewichte in den reinen Strategien σ_i und es gilt $\sigma^* = (\sigma_{11}, \sigma_{21})$ sowie $\sigma^{**} = (\sigma_{12}, \sigma_{22})$. Diese beiden Gleichgewichte sind unterschiedlich überzeugend. Die Grundidee der Untersuchung beider Gleichgewichte nach dem plausibelsten, besteht darin vorauszusetzen, dass die Mitspieler, wenn auch mit geringer positiver Wahrscheinlichkeit, von ihrer angestrebten Strategienwahl abweichen können.

Betrachtet man das Gleichgewicht σ^* aus Sicht des zweiten Spielers und nimmt dieser an, dass Spieler 1 mit Wahrscheinlichkeit ϵ von seiner Strategie σ_{11} abweicht, muss er mit der gemischten Strategie $s_1' = ((1-\epsilon), \epsilon)$ anstelle von σ_{11} rechnen. Vergleicht man nun die erwarteten Gewinne der beiden reinen Strategien von Spieler 2 ergibt sich

$$H_2(s_1', \sigma_{21}) \quad < \quad H_2(s_1', \sigma_{22}) \Leftrightarrow (1-\epsilon)100 - 10\epsilon < (1-\epsilon)100 + 40\epsilon$$

Daher ist es für Spieler 2 nicht sinnvoll Gleichgewicht σ^* anzustreben, wenn Spieler 1 mit einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit die Strategie σ_{12} wählt. Weicht er ab, ist der erwartete Gewinn von Spieler 2 bei σ_{22} größer als bei σ_{21}.

Die Analyse des anderen Gleichgewichtes σ^{**} aus Sicht von Spieler 1 zeigt, dass dieses robuster gegenüber kleinen Abweichungen ist. Angenommen Spieler 1 vermutet die gemischte Strategie $s_2' = (\epsilon, (1-\epsilon))$. Der Vergleich mit seinen reinen Strategien liefert daraufhin für ein hinreichend kleines ϵ

$$H_1(\sigma_{12}, s_2') = -10\epsilon + 40(1-\epsilon) = 40 - 50\epsilon > H_1(\sigma_{11}, s_2') = 0\epsilon + 0(1-\epsilon) = 0.$$

Für Spieler 2, der nun mit der gemischten Strategie $s_1' = (\epsilon, (1-\epsilon))$ rechnet, ergibt der Vergleich der beiden Strategien

$$H_2(s_1', \sigma_{22}) = 100\epsilon + 40(1-\epsilon) = 40 + 60\epsilon > H_2(s_1', \sigma_{21}) = 100\epsilon - 10(1-\epsilon) = 110\epsilon - 10.$$

Dadurch wird deutlich, dass die beiden Nash-Gleichgewichte σ^*, σ^{**} eine unterschiedliche Widerstandsfähigkeit gegenüber kleinen Abweichungen besitzen, die nicht immer rational sind. Hierbei ist die Größe der Abweichungswahrscheinlichkeit entscheidend.

Nach Holler (2006) ist die Forderung nach der Perfektheit eines Gleichgewichtes sehr eng mit der Elimination von Gleichgewichten in dominierten Strategien verbunden. Allerdings fügt er auch hinzu, dass die Perfektheit eine strengere Forderung ist.

Ein Normalformspiel G sei gestört durch η, wobei η eine Angabe zu den Mindestwahrscheinlichkeiten ist, mit denen die einzelnen Züge gewählt werden müssen. Dieses η ist das Rauschen, welches über das Spiel gelegt wird und heißt Perturbation.

Definition 7.29. Eine Funktion $\eta : \bigcup_i \sum_i \to [0,1)$ heißt **Minimumswahrscheinlichkeitfunktion** (trembling function), wenn für alle i = 1...,n gilt:

1. $\forall\, \sigma_i \in \sum_i : \quad \eta(\sigma_i) > 0$
2. $\sum_{\sigma_i \in \sum_i} \eta(\sigma_i) < 1$

$\eta(.)$ sichert in der ersten Forderung der Definition ab, dass jeder Spieler jede Strategie mit einer positiven Wahrscheinlichkeit spielt. Aus der zweiten Forderung geht hervor, dass das Entscheidungsproblem der Spieler ein wirkliches Entscheidungsproblem bleibt. Im Fall $\sum_{\sigma_i \in \Sigma_i} \eta(\sigma_i) = 1$ bliebe Spieler i keine andere Wahl als seine einzige gemischte Strategie $\eta(\sigma_i)$ zu wählen. Aufgrund der $\eta(.)$ kann man aus jedem Normalformspiel ein Spiel ableiten, in dem alle Strategien aller Spieler mit Wahrscheinlichkeit größer Null gewählt werden. Hierfür definiere man die perturbierten Strategienmengen

$$S_i(\eta) := \{s_i \in S_i \mid s_i = (p_{i1}, ..., p_{im_i}), \forall j_i : p_{ij_i} \geq \eta(\sigma_{ij_i})\}.$$

Definition 7.30. Gegeben sei ein Spiel G in Normalform, dann ist das **perturbierte Spiel** $G(\eta)$ gegeben durch

$$G(\eta) = \{S_1(\eta), ..., S_n(\eta); \hat{H}_1, ..., \hat{H}_n; N\},$$

wobei die Gewinnfunktionen $\hat{H}_i$ die Beschränkungen der Funktion H_i auf die in $G(\eta)$ möglichen Strategienvektoren s sind.

Auch an dieser Stelle wird im Folgenden, aufgrund der Übersichtlichkeit, auf die spezielle Bezeichnung $\hat{H}_i$ der Gewinnfunktion perturbierter Spiele verzichtet und weiterhin das Symbol H_i verwendet.

Definition 7.31. Gegeben sei ein Spiel G in Normalform und eine Indexmenge I. Ein Strategienvektor s^* heißt **perfektes Gleichgewicht** von Γ, wenn eine Folge $\{(s^{(t)}, \eta^{(t)})\}_{t \in I}$ existiert mit:

- $\lim_{t \to \infty} \eta^{(t)} \to 0$
- $\lim_{t \to \infty} s^{(t)} \to s^*$
- $\forall t \in I: \; s^{(t)}$ ist ein Nash-Gleichgewicht von $\Gamma(\eta^{(t)})$

Perfekte Gleichgewichte definiert man demnach als Grenzwert von Nash-Gleichgewichten in perturbierten Spielen, falls die Minimumswahrscheinlichkeiten gegen Null konvergieren. Die Perfektheit sorgt nach Rieck (2006) dafür, dass keine Strategien gewählt werden, die im allerersten Eliminationsschritt dominierter Strategien wegfallen.

Bemerkung 7.32. Die Perfektheit ist allerdings nicht sehr einschränkend. Für eine perfekte Strategienkonfiguration s^* genügt allein die Existenz irgendeiner Folge perturbierter Nash-Gleichgewichte mit Grenzwert s^*.

Lemma 7.33. Jedes perturbierte Spiel hat ein Nash-Gleichgewicht.

Beweisskizze Hierzu überprüft man alle Eigenschaften des Existenzsatzes für Nash-Gleichgewichte.

1. Ist eine Minimumswahrscheinlichkeitsfunktion $\eta(.)$ gegeben, so sind die Strategienmengen der Spieler $S_i(\eta) = S_i \cap \{p_i \in \mathbb{R}^{m_i} \mid p_{ij_i} \geq \eta(\sigma_{ij_i})\}$ als Durchschnitt zweier konvexer Mengen bzw. als Durchschnitt einer kompakten und einer abgeschlossenen Menge konvex und kompakt[25].
2. Die Gewinnfunktionen $H_i(.)$ sind auf der Teilmenge $S(\eta) = S_1(\eta) \times ... \times S_n(\eta) \subseteq S$ definiert. Die Eigenschaften der Linearität und der Stetigkeit verändern sich daher auch nicht. $\diamond$

Es gilt folgende äquivalente Beziehung.

Lemma 7.34. s^* ist genau dann ein Gleichgewicht in einem perturbierten Spiel $G(\eta)$, wenn folgende Beziehung erfüllt ist:

$$H_i(s^*_{-i}, \sigma_{ij}) < H_i(s^*_{-i}, \sigma_{ik}) \Rightarrow p^*_{ij} = \eta(\sigma_{ij}).$$

Mit anderen Worten zeichnet sich ein Nash-Gleichgewicht dadurch aus, dass ein Spieler nur mit zulässiger Minimumswahrscheinlichkeit eine nicht optimale Strategie auswählt.

[25] siehe Anhang A

Beweisskizze Vereinfache den Ausdruck $H_i(s^*_{-i}, s^*_i)$ soweit, dass die Abhängigkeit der σ_{ij} und σ_{ik} deutlich wird. Aufgrund der Linearität der $H_i(.)$ kann die Gewinnfunktion von Spieler i in einen von σ_{ij} und einen von σ_{ik} abhängigen Teil aufgespalten werden:

$$H_i(s^*_{-i}, s^*_i) = p^*_{ij} H_i(s^*_{-i}, \sigma_{ij}) + p^*_{ik} H_i(s^*_{-i}, \sigma_{ik}) + \sum_{h \neq j,k} p^*_{ih} H_i(s^*_{-i}, \sigma_{ih}).$$

Würde $H_i(s^*_{-i}, \sigma_{ij}) < H_i(s^*_{-i}, \sigma_{ik})$ und $p^*_{ij} > \eta(\sigma_{ij})$ gelten, könnte Spieler i seinen Gewinn durch Verschieben der Wahrscheinlichkeiten von σ_{ij} auf σ_{ik} erhöhen. Folglich kann s^* kein Nash-Gleichgewicht sein. ⋄

Zurück zu Beispiel 7.28.. Die zu Beginn noch sehr informellen Überlegungen haben σ^{**} als widerstandsfähiger und somit als perfektes Gleichgewicht bezeichnet. Mit den jetzt zur Verfügung stehenden Mitteln soll an dieser Stelle gezeigt werden, dass dies das einzige perfekte Gleichgewicht des beschriebenen Spiels ist. Dazu betrachtet man eine Folge von Minimumswahrscheinlichkeitsfunktionen $\eta^{(t)}(.) \equiv \frac{1}{t}$ für $t \in I \, mit \, t \rightarrow \infty$ und eine Folge von Nash-Gleichgewichten $s^{(t)}$ in $G(\eta^{(t)})$ mit $s^{(t)}_1 := (\frac{1}{t}, (1 - \frac{1}{t}))$ sowie $s^{(t)}_2 := (\frac{1}{t}, (1 - \frac{1}{t}))$. Werden σ_{11} und σ_{21} mit der Minimumswahrscheinlichkeit $\frac{1}{t}$ für genügend große t gewählt, sind die Strategienkonfigurationen $s^{(t)}$ Nash-Gleichgewichte in perturbierten Spielen. Es gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} s^{(t)} = \sigma^{**}$ und σ^{**} ist das einzige perfekte Gleichgewicht. Da hiermit $\eta^{(t)}(\sigma_{12})$ betrachtet wird, folgt $p^{(t)}_{12} > 0$ und es muss stets $p^{(t)}_{21} = \eta^{(t)}(\sigma_{21})$ gelten. Für $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta^{(t)} = 0$ folgt daraus $\lim_{t \rightarrow \infty} p^{(t)}_{12} = 0$. Somit muss nach Berninghaus (2006) Spieler 2 in jedem perfekten Gleichgewicht σ_{22} wählen, das von Spieler 1 mit σ_{12} beantwortet wird.

Ähnlich wie beim Nash-Gleichgewicht erfolgt nun die Analyse der Existenzbedingungen und eine Charakterisierung perfekter Gleichgewichte.

Satz 7.35. Jedes Spiel in Normalform hat ein perfektes Gleichgewicht.

Beweisidee Betrachte eine Folge perturbierter Spiele $G(\eta^{(t)})$ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta^{(t)} = 0$ und $t \in I$. Bekanntermaßen besitzt jedes perturbierte Spiel ein Nash-Gleichgewicht $s^{(t)} \in S(\eta^{(t)}) \subseteq S$. Aufgrund der Kompaktheit von S existiert ein $s^* \in S$ und eine Teilfolge $\{s^{(t_k)}\}_{t_k \in I}$ [26] mit $s^{(t_k)} \rightarrow s^*$. Als Grenzwert einer Folge von Nash-Gleichgewichten in perturbierten Spielen $\Gamma(\eta^{(t_k)})$ ist s^* der Definition 7.31. nach ein perfektes Gleichgewicht.⋄

Bevor die Eigenschaften perfekter Gleichgewichte genauer dargestellt werden, wird zunächst die Beziehung zwischen beiden Gleichgewichtskonzepten analysiert.

[26] siehe Anhang A

Satz 7.36. Jedes perfekte Gleichgewicht ist ein Nash-Gleichgewicht.

Beweisidee Sei s^* ein perfektes Gleichgewicht aber kein Nash-Gleichgewicht. Dann existiert mindestens ein Spieler i und eine Strategie $s'_i \in S_i$ mit $H_i(s^*) < H_i(s^*_{-i}, s'_i)$. Für die weiteren Überlegungen unterscheidet man zwei Fälle.

1. Man nimmt an, dass s'_i vollständig gemischt ist und somit nur positive Komponenten besitzt. Dann gibt es eine Schranke $\bar{t} \in I$, so dass für alle $t \in I$ und $t > \bar{t}$ $s'_i \in S_i(\eta^{(t)})$ gilt. s^* ist laut Definition 7.31. der Limes von Nash-Gleichgewichten $s^{(t)}$ in $G(\eta^{(t)})$. Aufgrund der Stetigkeit der Gewinnfunktion $H_i(.)$ gilt dann für genügend kleine $\eta^{(t)}$ die Relation $H(s^{(t)}) < H_i(s^{(t)}_{-i}, s'_i)$. Dies ist allerdings ein Widerspruch zur Annahme, dass $s^{(t)}$ Nash-Gleichgewichte in den perturbierten Spielen $G(\eta^{(t)})$ sind.
2. In diesem Fall nimmt man an, dass mindestens eine Komponente von s'_i gleich Null ist. Anschließend perturbiert man s'_i zu $s''_i \approx s'_i$, damit s''_i nur noch strikt positive Komponenten besitzt. Wegen der Stetigkeit von $H_i(.)$ ist es möglich s'_i soweit zu stören, dass $H_i(s^*) < H_i(s^*_{-i}, s'_i)$ gilt. Wie im ersten Fall liegt auch hier ein Widerspruch vor.$\diamond$

Bemerkung 7.37. Die Umkehrung dieses Satzes ist falsch. Ein Gegenbeispiel liefert Beispiel 7.28.. Hier existieren zwei Nash-Gleichgewichte, von denen lediglich eines ein perfektes Gleichgewicht ist. Daraus kann man folgern, dass perfekte Gleichgewichte eine echte Untermenge der Nash-Gleichgewichte sind.

(Berninghaus, 2006, S.54ff. / Holler, 2006, S.103f. / Rieck, 2006, S.230ff.)

7.1.5 Minimax

Minimax ist ein Lösungskonzept, dass im speziellen Fall der Nullsummenspiele angewandt wird. Es basiert auf dem bereits angekündigten Minimax-Theorem von von Neumann aus dem Jahre 1928. Dieses Theorem ist Rieck (2006) folgend äußerst bekannt geworden. Binmore (1992) betont ebenfalls, dass dieses das am meisten bekannte Ergebnis der Spieltheorie ist. Allerdings hat dieses Theorem trotz seines großen Bekanntheitsgrades heute keine große Bedeutung mehr, da es nur in Zwei-Personen-Nullsummenspielen von Relevanz ist. Der Vollständigkeit halber wird es im Folgenden, allerdings ohne Beweis, vorgestellt. Einen der vielzähligen Beweise gibt Binmore (1992).

Theorem 7.38. Minimax-Theorem

Seien S_1 und S_2 die endlichen gemischten Strategienmengen eines Zwei-Personen-Nullsummenspiels und $H : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ die Auszahlungsfunktion des ersten Spielers. Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung für einen Sattelpunkt $\underset{s_1}{max}[\underset{s_2}{min}H(s_1, s_2)] = \underset{s_2}{min}[\underset{s_1}{max}H(s_1, s_2)] = v$.

Aus dem Minimax-Theorem folgt nach Dresher (1961), dass Spieler 1, wenn er vernünftig spielt, einen Minimalbetrag erhält und Spieler 2, wenn er ebenfalls vernünftig spielt, erreichen kann, dass Spieler 1 nicht mehr als diesen Betrag erhalten kann. Der Sattelpunkt ist somit ein Spezialfall des Nash-Gleichgewichtes für Zwei-Personen-Nullsummenspiele. Fasst man die Aussage des Theorems zusammen, kommt man zu dem Schluss, dass „man jedem endlichen Zweipersonen-Nullsummenspiel einen Wert v zuordnen kann: den durchschnittlichen Gewinn, den sich Spieler I von Spieler II erwarten kann, wenn beide Spieler vernünftig agieren.“ (Davis, 1972, S.49)

Rieck (2006) fügt hinzu, dass die Bedeutung von Nullsummenspielen lange Zeit überschätzt wurde, weil das erste überzeugende Lösungskonzept der Spieltheorie für Nullsummenspiele definiert war. Die Unterscheidung in Nullsummen- und Nichtnullsummenspiele ist seiner Meinung nach allerdings nicht so entscheidend, weil heute die meisten Lösungskonzepte für beide Fälle Gültigkeit besitzen. Die Analyse realer Situationen erfordert außerdem den Nutzen der einzelnen Spieler unterschiedlich zu interpretieren.

(Binmore, 1992, S.235f. / Davis, 1972, S.49 / Dresher, 1961, S.14f. / Rieck, 2006, S.287ff.)

7.2 Lösungskonzepte von Extensivformspielen

In der Spielbaumdarstellung werden oftmals dynamische Entscheidungssituationen, in denen die Spieler ihre Handlungen von Informationen abhängig machen können, analysiert. Häufig ist es außerdem, im Gegensatz zu den Normalformspielen, möglich das Gesamtspiel in einzelne Teilspiele zu zerlegen.

7.2.1 Nash-Gleichgewichte

Im Folgenden konzentriere ich mich in Anlehnung an Berninghaus (2006) ausschließlich auf die Untersuchung von Verhaltensstrategiekonfigurationen $b = (b_1, ..., b_n)$ mit $b_i \in B_i$ und untersuche Gleichgewichtskonzepte in Extensivformspielen. Nahe liegend ist die folgende Übertragung des Nash-Konzeptes für Normalformspiele auf Spiele in Extensivform, welche ineinander übergeführt werden können[27]. Dabei sind

[27]Dies ist generisch möglich wie 6.3 zeigt.

aufgrund der Möglichkeit der verfeinerten Darstellung eines Spiels weitere Refinements eines Nash-Gleichgewichtes erst möglich.

Definition 7.39. Eine Strategienkonfiguration $b^* = (b_1^*, ..., b_n^*)$ heißt **Nash-Gleichgewicht**, wenn für jeden Spieler $i \in N$ gilt:

$$b_i \in B_i \Rightarrow H_i(b_{-i}^*, b_i^*) \geq H_i(b_{-i}^*, b_i)$$

Formt man eine Spielbaumdarstellung in die bereits bekannte Normalform um, kann man dort das Nash-Gleichgewicht berechnen. Man spricht in diesem Zusammenhang von der induzierten Normalform G_Γ.

Bemerkung 7.40. Zur Bestimmung der induzierten Normalform von Γ erfasst man die Menge der reinen Strategien Φ_i als Strategienmengen von G_Γ. Weiterhin ordnet man jeder Strategienkonfiguration $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n) \in \Phi$ ihren Endpunkt $z_\phi$zu, definiert $H_i(\phi) := \Pi_i(z_\phi)$ und erhält somit die benötigte Gewinnfunktion. Durch die Einführung gemischter Strategien, welche sich in den Auszahlungen $H_i(s_1, ..., s_n)$ herleiten lassen, wird der Rahmen von G_Γ erweitert. Der Satz von Kuhn sichert die Existenz einer Verhaltensstrategienkonfiguration b in Γ mit $H_i(s) = H_i(b)$.

Berninghaus bemerkt, dass anscheinend jedem Nash-Gleichgewicht in Γ ein Nash-Gleichgewicht in G_Γ und umgekehrt entspricht. Daher kann aus dem Existenzsatz von Nash die Existenz eines Nash-Gleichgewichtes b^* in Γ gefolgert werden.

(Berninghaus, 2006, S.104)

7.2.2 Teilspielperfekte Gleichgewichte

Ebenso wie im Fall der Normalformspiele ist es auch in der extensiven Spielform möglich, dass Nash-Gleichgewichte in einigen Spielen unplausible Lösungen sein können. Der Mathematiker Reinhard Selten hat dieses Problem in den Siebziger Jahren des letzten Jahrhunderts untersucht. Er kam zu dem Schluss, dass die bis dahin behauptete Äquivalenz von Normal- und Extensivformspielen neu überdacht werden muss. Berninghaus (2006) folgend wird im weiteren Verlauf deutlich werden, dass bestimmte Eigenschaften von Nash-Gleichgewichten in Extensivformspielen bei der Übersetzung in die induzierte Normalform nicht mehr erfasst werden können oder aber durch strengere Lösungskonzepte erfasst werden müssen. Ein Beispiel eines einfachen Extensivformspiels, bei dem nicht alle Nash-Gleichgewichte plausibel sind, soll die Zusammenhänge veranschaulichen.

Beispiel 7.41. Markteintrittsspiel

Gegeben sei ein Zwei-Personen-Spiel, bei dem Unternehmen 2 Monopolist auf einem Markt ist. Ein möglicher Konkurrent, Unternehmen 1, überlegt, ob er in den Markt eintreten soll. Zur Vereinfachung der Spielsituation sei angenommen, dass der Monopolist lediglich zwei Reaktionsmöglichkeiten auf den Markteintritt des Konkurrenten hat. Er kann entweder durch Preis-oder Werbepolitik aggressiv (A) oder kooperativ (C) reagieren, indem er sich mit ihm den Markt teilt.

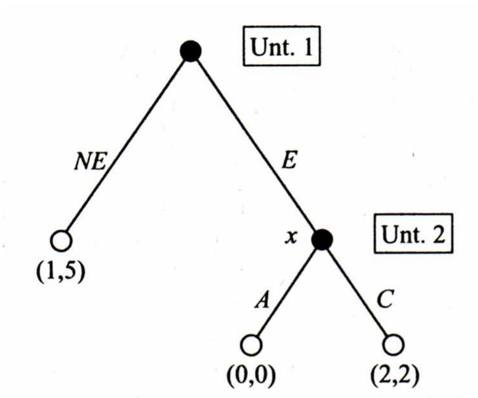


Abbildung 13: Spielbaum des Markteintrittspiels (Berninghaus, 2006, S.108)

Unternehmen 1 wählt in der ersten Stufe zwischen Eintritt (E) und Nichteintritt (NE) in den Markt. In der zweiten Stufe wählt der Monopolist zwischen aggressivem (A) oder kooperativem (C) Verhalten. Die Auszahlungen können, obwohl sie konstruiert sind, ökonomisch sinnvoll interpretiert werden. Der Markteintritt lohnt sich für Unternehmen 1 nur, wenn der Monopolist kooperativ reagiert. Für den Monopolisten ist es verständlicherweise am günstigsten, wenn das andere Unternehmen nicht in den Markt eintritt.

Die Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien lauten in diesem Spiel $b^* = (E, C)$ und $b^{**} = (NE, A)$. Durch b^* wird eine Situation beschrieben, in der Unternehmen 2 den Eintritt nicht verhindern kann. b^{**} stellt dagegen eine erfolgreiche Eintrittsabschreckung dar. Hier wird dem Konkurrenten angedroht, einen Markteintritt mit einer aggressiven Reaktion zu beantworten. Sicherlich stellt sich Unternehmen 1 beim Eintritt und tatsächlicher Durchführung von 2 schlechter. Doch ist diese Drohung glaubwürdig? Tritt Unternehmer 1 in den Markt ein, stellt sich Unternehmen 2 nur dann schlechter, wenn er aggressiv reagiert. Daher ist für rational denkende Spieler b^{**} kein plausibles Gleichgewicht dieser Situation.

Die plausiblen Gleichgewichte dieses Spiels besitzen keine unglaubwürdigen Drohungen und werden im Folgenden teilspielperfekte Gleichgewichte genannt.

Vor einer genauen Formulierung des neuen Gleichgewichtskonzeptes wird zunächst der Begriff des Teilspiels eines Extensivformspiels eingeführt.

Definition 7.42. Gegeben sei ein Extensivformspiel Γ und ein Knoten $x \in X$. Lässt man ein neues Extensivformspiel in x beginnen, d.h. betrachten wir x als Anfangsknoten eines neuen Extensivformspiels, in dem alle Pfade aus den Pfaden von Γ bestehen, die durch den Knoten x gehen, so erhalte ein **Teilspiel** Γ_x, sofern folgende Einschränkung erfüllt ist:

Alle Informationsmengen von Γ gehören entweder zu Γ_x oder nicht, d.h. durch Teilspielbildung sollen keine Informationsmengen zerschnitten werden.

Bemerkung 7.43. Ist diese Einschränkung verletzt, wird die betroffene Informationsmenge u geteilt. Lässt man Γ_x als Teilspiel zu, ist die strategische Situation des Spielers, der in u an der Reihe ist, gegenüber dem ursprünglichen Spiel verändert. Dieser Spieler kann in Γ_x die vorherige Wahl seines Gegenspielers ablesen. Ein Teilspiel kann nach der obigen Definition durchaus ein Ein-Personen-Spiel sein. Weiterhin ist das gesamte Spiel ein Teilspiel von sich selbst. Ist ein Teilspiel kleiner als das Ausgangsspiel, nennt man dies ein echtes Teilspiel.

Definition 7.44. Gegeben sei eine Konfiguration von Verhaltensstrategien $b = (b_1, ..., b_n)$. Die v**on b auf Γ_x induzierte Konfiguration** von Verhaltensstrategien lautet $b_x = (b_{1x}, ..., b_{nx})$.

Bemerkung 7.45. Um b_x zu ersetzen, muss lediglich die Verhaltensstrategie b_i jedes Spielers durch die in Γ_x befindlichen Informationsmengen ersetzt werden.

Definition 7.46. Eine Konfiguration b^* heißt **teilspielperfektes Gleichgewicht**, wenn b^* auf jedem Teilspiel Γ_x ein Nash-Gleichgewicht b_x^* induziert.

Blickt man zurück auf das Markteintrittspiel (Beispiel 7.41.) und wendet dort das Gleichgewichtskonzept an, wird deutlich dass $b^{**} = (NE, A)$ nicht teilspielperfekt ist. Gleichgewicht $b^{*} = (E, C)$ dagegen besitzt diese Eigenschaft. Zum Vergleich betrachten wir noch die induzierte Normalform G_Γ mit den reinen Strategien NE und E des potentiellen Konkurrenten und den reinen Strategien A und C des Monopolisten.

		Monopolist	
		A	*C*
Potentieller Konkurrent	*E*	0, 0	2, 2
	NE	1, 5	1, 5

Abbildung 14: Auszahlungstabelle Markteintrittspiel (Berninghaus, 2006, S.112)

In dieser Normalform existieren zwei Nash-Gleichgewichte (E, C) und (NE, A). Allein durch die Gleichgewichtsbedingung ist es allerdings nicht möglich die Gleichgewichte qualitativ zu unterscheiden. Da die Strategie A dominiert ist, ergibt sich (E, C) als einziges Gleichgewicht in undominierten Strategien. Hier wird besonders deutlich, dass durch die Übersetzung in die induzierte Normalform oftmals wichtige Informationen über die Charakteristik der Nash-Gleichgewichte verloren gehen (siehe auch 6.3).

Dieses stark vereinfachte Markteintrittspiel ist ein Ausschnitt des Chain-Stone-Paradox, welches Selten ausführlich diskutiert hat.

Die Idee des teilspielperfekten Gleichgewichtes besteht darin „solche Nash-Gleichgewichte auszuschließen, die durch ein unplausibles Verhalten abseits des Gleichgewichtspfades entstehen.“ (Rieck, 2006, S.213)

Demnach fordert die Teilspielperfektheit eines Spiels, dass die Gleichgewichtsbedingung nicht nur für das gesamte Spiel, sondern auch für jedes Teilspiel erfüllt ist. Zur Gleichgewichtsfindung fügt er an, dass das Eliminieren dominierter Strategien eng mit der Teilspielperfektheit verbunden ist. Dies ist an der Methode der Rückwärtsinduktion (siehe auch Rezept 7.6.4.) erkennbar mit der man in der Spielbaumdarstellung Gleichgewichte bestimmt. Man prüft, von hinten beginnend, für jeden einzelnen Informationsbezirk, ob sich der jeweilige Spieler an die von seiner Gleichgewichtsstrategie vorgeschriebene Entscheidung hält. Ist dies nicht der Fall, liegt kein teilspielperfektes Gleichgewicht vor. Im Spezialfall der endlichen Spiele mit vollständiger Information entspricht dieses Vorgehen der wiederholten Eliminierung dominierter Strategien. Nach Mehlmann (1997) existiert daher in jedem endlichen Spielbaum mit vollständiger Information ein teilspielperfektes Gleichgewicht. Er ergänzt diese Aussage und fügt hinzu, dass falls kein Spieler zwischen zwei verschiedenen Spielausgängen indifferent ist, ein teilspielperfektes Gleichgewicht sogar eindeutig ist. In der zugehörigen Normalform wird ein Gleichgewicht daher keine schwach dominierte Strategie enthalten, da nur Gleichgewichte in nicht dominierten Strategien zugelassen werden.

(Berninghaus, 2006, S.107ff. / Mehlmann, 1997, S. 47f. / Rieck, 2006, S.211ff.)

7.2.3 Sequentielles Gleichgewicht

Nach Holler (2006) bildet die intuitiv überzeugende Forderung nach Perfektheit an ein Lösungskonzept extensiver Spiele den Ausgangspunkt für zahlreiche Erweiterungen. Um teilspielperfekte Gleichgewichte zu bestimmen, müssen die Spieler in der Lage sein, an jedem Entscheidungsknoten ihre optimale Strategie zu berechnen. Die dafür notwendige Voraussetzung ist, dass jeder Spieler stets weiß, an welchem Entscheidungskonten er sich befindet. Daher muss ihre Informationsmenge an jedem Knoten aus genau einem Ereignis bestehen. Können die Spieler die vorangegangenen Züge der Mitspieler allerdings nicht beobachten oder besitzen sie lediglich unvollständige Information über die Typen der anderen Mitspieler, wissen sie nicht, an welchem Knoten sie sich befinden. Das Konzept teilspielperfekter Gleichgewichte ist daher in diesem Fall nicht hilfreich, um unplausible Gleichgewichte auszuschließen.

In einer solchen Situation müssen die Spieler einschätzen, mit welcher Wahrscheinlichkeit sie sich an einem bestimmten Knoten befinden. In einigen Spielen können die möglichen Spielzüge von Spielern, die im Gleichgewicht nicht ziehen können, bei strategischen Überlegungen unberücksichtigt bleiben. Das Konzept des sequentiellen Gleichgewichts garantiert, dass jeder Spieler auf jeder Stufe des Spiels dazu befähigt ist, die weitere Entwicklung des Spiels bewerten zu können, wenn dieses Spiel mit seiner Entscheidung beginnen würde. Beginnt ein Teilspiel in einer echten Informationsmenge, besteht zunächst ein Informationsdefizit, da der Spieler, der zu diesem Zeitpunkt am Zug ist, nicht genau weiß in welchem Teil des Spielbaumes er sich befindet. Zum Ausgleich wird daher im sequentiellen Gleichgewicht angenommen, dass jeder Spieler eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Knoten seiner Informationsmengen besitzt, die System von Überzeugungen genannt wird, um die Aussagen der Teilspielperfektheit benutzen zu können. Rieck (2006) benutzt in diesem Zusammenhang den Ausdruck der belief-Funktion. Die weiteren Ausführungen erfolgen erneut nach Berninghaus (2006).

Definition 7.47. Ein **System von Überzeugungen** ist eine Funktion

$$\mu : X \to [0,1]$$

mit der Eigenschaft

$$\forall u \in U \ : \ \sum_{x \in u} \mu(x) = 1$$

Mit anderen Worten ist $\mu(x)$ für $x \in u$ die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Spieler, der in u an der Reihe ist, annimmt, dass auf den vorangegangenen Spielstufen so gewählt wurde, dass $x \in u$ resultiert. Bei vollkommener Information, sprich für einelementige Informationsmengen u, gilt selbstverständlich $\mu(x) = 1$.

Ist ein Spieler zu einem bestimmten Zeitpunkt $u \in U$ am Zug, sind für seine Entscheidung an dieser Stelle seine bedingt-erwarteten Auszahlungen von Relevanz. Er geht davon aus, dass das Spiel in u neu startet. Bei der Ermittlung der Auszahlungsfunktion ist das System der Überzeugung von großer Bedeutung, da es die Wahrscheinlichkeit angibt, von welchem Knoten in u gestartet wird.

Definition 7.48. Die **Menge der von u aus erreichbaren Endpunkte** bezeichnet man mit $Z(u)$. Mit Hilfe der Verteilung über $Z(u)$ definiert man die **bedingt-erwartete Auszahlung** von Spieler i, die durch μ und b gegeben ist, durch

$$H_i^{(\mu)}(b \mid u) := \sum_{z \in Z(u)} P_\mu^{(b)}(z \mid u)\Pi_i(z)$$

Damit die Verhaltenskonfiguration $b = (b_1, ..., b_n)$ Bestandteil eines sequentiellen Gleichgewichtes ist, wird sequentielle Rationalität gefordert. Dies bedeutet, dass kein Spieler an keiner seiner Informationsmengen einen Grund hat, von seiner gewählten Verhaltensstrategie abzuweichen, wenn das Spiel in diesem Punkt starten würde.

Definition 7.49. Ein Tupel (μ, b^*) heißt **sequentiell rational**, wenn für jeden Spieler i an jeder seiner Informationsmengen $u_i \in U_i$ gilt:

$$b_i \in B_i \Rightarrow H_i^{(\mu)}(b^* \mid u_i) \geq H_i^{(\mu)}(b_{-i}^*, b_i \mid u_i)$$

Anders ausgedrückt nennt man eine Strategienkonfiguration sequentiell rational, wenn b_i^* an jeder Informationsmenge die beste Antwort von Spieler i ist. Ein Spieler kann dabei seine bedingt erwartete Auszahlung für jede seiner Informationsmengen u_i berechnen, selbst wenn u_i im gesamten Spielverlauf nicht erreicht wird. Dies hat den einfachen Grund, dass μ für alle Informationsmengen definiert ist. Unter der Annahme der vollkommenen Rationalität der Spieler, ist die Auswertung aller zur Verfügung stehenden Informationen eines Spielers auch sinnvoll.

Die bisherigen Überlegungen basierten alle auf von außen vorgegebenen Systemen von Überzeugungen. Es stellt sich nun die Frage, wie man μ selbst bestimmen kann. Dazu nimmt man neben der vollkommenen Rationalität der Spieler an, dass ein Spieler alle ihm zur Verfügung stehenden Informationen auswerten wird.

Definition 7.50. Die **Realisationswahrscheinlichkeit eines Knotens x** ist definiert als $P^{(b)}(x) := \sum_{z \in Z(x)} P^{(b)}(z)$ und die **Realisationswahrscheinlichkeit von** u_i als $P^{(b)}(u_i) := \sum_{x \in u_i} P^{(b)}(x)$. Z(x) bezeichnet dabei die **Endpunkte** $z \in Z$**,** die von x aus erreicht werden können.

Für jeden Knoten $x \in u_i$ wird $\mu(x)$ als **bedingte Wahrscheinlichkeit** von x durch $\mu(x) := \frac{P^{(b)}(x)}{P^{(b)}(u_i)}$ definiert.

Da $P^{(b)}(u_i) > 0$ gilt, ist die Definition von μ unproblematisch für solche Informationsmengen, die innerhalb eines von b erzeugten Spiels erreicht werden. Allerdings ist sie problematisch für $P^{(b)}(u_i) = 0$. Dies trifft für Informationsmengen zu, die bei gegebenem b im Spiel nicht erreicht werden. Zur Lösung dieses Problems führt man ebenso wie im Fall der Teilspielperfektheit Perturbationen ein, so dass lediglich vollständig gemischte Strategien gespielt werden können. Dann wird auch jeder Informationsbezirk mit positiver Wahrscheinlichkeit erreicht.

Definition 7.51. Das Tupel (μ, b) heißt **konsistent**, wenn eine Indexmenge I und eine Folge $\{(\mu_t, b^{(t)})\}_{t \in I}$ existiert mit

- $\mu = \underset{t\to\infty}{lim}\, \mu_t$, $b = \underset{t\to\infty}{lim}\, b^{(t)}$ und
- $(\mu_t, b^{(t)}) \in \Pi := \{(\mu, b) \mid P^{(b)}(u_i) > 0,\ \mu(x) = \frac{P^{(b)}(x)}{P^{(b)}(u_i)},\ x \in u_i\}$

Ein Tupel (μ, b) ist somit konsistent, widerspruchsfrei, wenn man Strategientupel finden kann, die sich von b nur minimal unterscheiden und alle u_i mit positiver Wahrscheinlichkeit erreichen. Sequentielle Rationalität und Konsistenz sind die erforderlichen Bestandteile eines sequentiellen Gleichgewichts.

Definition 7.52. Ein Tupel (μ^*, b^*) heißt **sequentielles Gleichgewicht**, wenn es sequentiell rational und konsistent ist.

Anmerkung 7.53. Stellt man ein sequentielles Gleichgewicht dar, muss man aufgrund der Eindeutigkeit stets neben dem Strategientupel b das System der von Überzeugungen angeben.

(Berninghaus, 2006, S. 117ff. / Holler, 2006, S.113ff. / Rieck, 2006, S.239ff.)

7.2.4 (trembling-hand) Perfektes Gleichgewicht

In Kapitel 7.1.4 wurden bereits perfekte Gleichgewichte für Normalformspiele beschrieben. Jetzt soll das Perfektheitskonzept auf Spiele in Extensivform übertragen werden. Die Grundidee des perfekten Gleichgewichtes in Extensivformspielen besteht darin Verhaltensstrategiekonfigurationen abzuspalten, die nicht widerstandsfähig gegenüber kleinen (vernunftwidrigen) Abweichungen der Gegenspieler sind.

Definiere daher zu einem gegebenen Spiel in Spielbaumdarstellung das perturbierte Spiel in Spielbaumdarstellung. Hier spielt jeder Spieler alle Züge mit positiver Minimumswahrscheinlichkeit an allen Informationsmengen. Die Minimumswahrscheinlichkeitsfunktion definiert man analog zu den Normalformspielen.

Definition 7.54. Eine Funktion

$$\eta : \bigcup_u C_u \to [0,1)$$

heißt **Minimumswahrscheinlichkeitsfunktion (trembling function)**,

wenn für alle Spieler i mit i = 1,...,n gilt:

1. $\forall u : c \in C_u \Rightarrow \eta(c) > 0$
2. $\forall u : \sum_{c \in C_u} \eta(c) < 1$

Die Minimumswahrscheinlichkeitsfunktion zwingt jeden Spieler, der in u an der Reihe ist, die zur Verfügung stehende Aktion $c \in C$ wenigstens mit der Wahrscheinlichkeit $\eta(c)$ zu spielen. Mit Hilfe von η ist es jetzt möglich zu einem Extensivformspiel Γ das perturbierte Spiel $\Gamma(\eta)$ zu definieren.

Definition 7.55. Gegeben sei ein Extensivformspiel Γ. Das **perturbierte Spiel** $\Gamma(\eta)$ entsteht aus Γ, indem man die Menge der Verhaltensstrategien B_i durch die Menge der perturbierten Verhaltensstrategien ersetzt:

$$B_i(\eta) = \{b_i \in B_i \mid \forall u \in U_i : c \in C_u \Rightarrow b_i(c) \geq \eta(c)\}$$

Definition 7.56. Ein Tupel von Verhaltensstrategien $b^* = (b_1^*, ..., b_n^*) \in B$ heißt **perfektes Gleichgewicht**, wenn eine Folge von Nash-Gleichgewichten $b(\eta)$ in $\Gamma(\eta)$ existiert mit $b^* = \lim\limits_{\eta \to 0} b(\eta)$.

Alle Eigenschaften der perfekten Gleichgewichte, die in 7.1.4 für Normalformspiele dargestellt sind, gelten auch für Extensivformspiele. Im weiteren Verlauf spielt insbesondere das folgende Kriterium für die Nash-Eigenschaft von Strategienkonfigurationen $b(\eta)$ in perturbierten Spielen (vergleiche dazu Lemma 7.34.) eine besondere Rolle.

Bezeichne b_{ic} (bzw. $b_{ic'}$) eine Verhaltensstrategie von Spieler i, bei der er an einer Informationsmenge $u \in U_i$ die Aktion c (bzw. c') wählt. Dann ist $b(\eta)$ genau dann ein Nash-Gleichgewicht in $\Gamma(\eta)$, wenn für alle $i \in N$ an jeder Informationsmenge $u \in U_i$ gilt:

$$H_i(b_{-i}(\eta), b_{ic}) < H_i(b_{-i}(\eta), b_{ic'}) \Leftrightarrow b_i(\eta)(c) = \eta(c)$$

Dies bedeutet nichts anderes, als dass eine nicht beste Antwort $c \in C_u$ im Nash-Gleichgewicht mit Minimumswahrscheinlichkeit gespielt wird. (Berninghaus, 2006, S.128)

Nicht alle sequentiellen Gleichgewichte müssen auch perfekte Gleichgewichte sein. Im folgenden Satz wird deutlich werden, dass die Menge der perfekten Gleichgewichtsstrategienkonfigurationen eine Teilmenge der sequentiellen Gleichgewichtsstrategienkonfigurationen ist. Generisch gelangen beide Konzepte immer zum gleichen Ergebnis. In einigen Spezialfällen ist das perfekte Gleichgewicht nach Rieck (2006) sogar etwas strenger. Eine präzise Formulierung der Zusammenhänge beider Konzepte liefert der folgende Satz nach Berninghaus (2006).

Satz 7.57.

1. Jedes sequentielle Gleichgewicht ist teilspielperfekt.
2. Jedes perfekte Gleichgewicht ist ein sequentielles Gleichgewicht.
3. Für „fast alle“ Extensivformspiele Γ gilt: „Fast alle“ sequentiellen Gleichgewichte sind perfekt.

Beweisidee

1. Jedes sequentielle Gleichgewicht (b^*, μ^*) ist nach Definition sequentiell rational und somit teilspielperfekt, da aufgrund der sequentiellen Rationalität b_x^* in jedem echten Teilspiel beste Antwort auf sich selbst ist.
2. Angenommen b^* ist ein perfektes Gleichgewicht. Dann existiert eine Indexmenge I und eine Folge von Nash-Gleichgewichten $b(\eta_t)$ in $\Gamma(\eta_t)$ mit $\lim_{t\to\infty} b(\eta_t) = b^*$ und $t \in I$. Da $b(\eta_t) > 0$ gilt, wird jede Informationsmenge in $\Gamma(\eta_t)$ mit positiver Wahrscheinlichkeit angenommen und man kann die Wahrscheinlichkeitsverteilungen μ_t auf den Knoten $\Gamma(\eta_t)$ für $x_i \in u$ wie folgt definieren:

$$\mu_t(x_i) := \frac{P^{(b(\eta_t))}(x_i)}{P^{(b(\eta_t))}(u_i)}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist es möglich anzunehmen, dass μ_t gegen ein μ^* konvergiert. (μ^*, b^*) ist daher konsistent. Um zu zeigen, dass (b^*, μ^*) ein sequentielles Gleichgewicht ist, genügt es die Rationalität zu zeigen. Da $b(\eta_t) > 0$ ist, wird jede Informationsmenge in $\Gamma(\eta_t)$ mit positiver Wahrscheinlichkeit erreicht. Daher gilt für jeden Spieler $i \in N$ an jeder Informationsmenge $u \in U_i$

$$H_i(b_{-i}(\eta_t), b_i(\eta_t) \mid u) \geq H_i(b_{-i}(\eta_t), b_i \mid u)$$

für beliebige Verhaltensstrategien $b_i \in B_i(\eta_t)$. Da die Gewinnfunktion $H_i(.)$ stetig ist, gilt die Ungleichung auch für $b^* = \lim_{t \to \infty} b(\eta_t)$ und beliebige $b_i \in B_i$. Daraus folgt, dass (b^*, μ^*) ebenfalls sequentiell rational ist.

3. Aufgrund der Komplexität des Beweises und der Vielzahl verwendeter mathematischer Methoden verweist Berninghaus auf die Autoren Kreps und Wilson[28]. $\diamond$

Bemerkung 7.58. Die Besonderheit der sequentiellen Gleichgewichte besteht darin, dass sie explizit die bedingten Erwartungen angeben und diese, abgesehen von der Konsistenz, auch beliebig spezifizierbar sind. Für perfekte Gleichgewichte dagegen sind die stützenden bedingten Erwartungen implizit durch die Folge $b(\eta)$, mit $\eta \to 0$, von approximierenden Gleichgewichten ableitbar. Die dritte Aussage des Satzes kann so verstanden werden, dass kleine Änderungen eines Extensivformspiels, in dem sequentielle und perfekte Gleichgewichte auseinander fallen, genügen, um die Gleichheit der beiden Konzepte wieder herzustellen.

Die Refinements der Nash-Gleichgewichte lassen sich, wie im obigen Satz bereits angedeutet, folgendermaßen zueinander in Beziehung setzen: Die Menge der (trembling-hand) perfekten Gleichgewichte ist eine Teilmenge der sequentiellen Gleichgewichte und diese wiederum sind eine Teilmenge der teilspielperfekten Gleichgewichte.

(Berninghaus, 2006, S. 127ff. / Holler, 2006, S.121ff.)

7.3 Lösungskonzepte der Agentennormalform

Aufbauend auf die Lösungskonzepte der beiden anderen Darstellungsweisen, werden die Lösungskonzepte nach Rieck (2006, S.236f.) auf die Agentennormalform angewandt. Insbesondere wenn das Konzept der (trembling-hand) Perfektheit auf extensive Spiele angewendet werden soll, muss man immer die Agentennormalform als Modell zugrunde legen. Dies hat den einfachen Grund, das die Normalform und

[28] Kreps, D. / Wilson, R. (1982). Sequential equilibria. In: Econometrica 50, 863-894.

das Nash-Gleichgewichtskonzept den Spieler als eine Einheit ansehen und einen zentralisierten Spielerbegriff verwenden. Ein zentralisierter Spieler verwendet reine und gemischte Strategien. Die Agentennormalform dagegen unterstellt einen dezentralen Spielerbegriff. Das bedeutet nichts anderes, als dass ein Spieler im gesamten Spielverlauf keine durchgehende Identität besitzt. Ein dezentralisierter Spieler wählt nur lokale Verhaltensweisen. Jeder Agent eines Spielers besitzt daher seine eigene Strategienmenge, die aus den Zügen des von ihm verwalteten Informationsbezirkes stammt. Eine sehr anschauliche Interpretation ergibt sich, wenn man die Agenten eines Spielers als unterschiedliche Personen eines Teams ansieht.

7.4 Praktische Lösungsverfahren

Bei der Auseinandersetzung mit spieltheoretischen Erkenntnissen steht man, wie bereits in den angeführten Beispielen deutlich wurde, oftmals vor dem Problem Gleichgewichte zu suchen oder dominierte Strategien zu eliminieren. Daher werden nun Rieck (2006, S.275ff.) folgend einige ausgewählte rezeptartige Verfahren kurz aufgeführt.

7.4.1 Wie findet man dominierte Strategien?

Folgendes Verfahren hilft alle dominierten Strategien in Matrixspielen zu finden.

Rezept 7.59.

1. Betrachte nacheinander alle Zeilen. Die gerade betrachtete sei i.
   (a) Betrachte nacheinander alle noch nicht gestrichenen folgenden Zeilen i + 1,..., i + j, wobei sich die Anzahl der Folgezeilen bei jedem Durchlauf um 1 verringert und vergleiche sie jeweils mit der i-ten.
   (b) Überprüfe, ob eine der beiden betrachteten Zeilen die andere dominiert. Wenn nein, gehe zur nächsten nicht gestrichenen über. Wenn ja, versehe die dominierte Zeile mit einer Löschmarkierung. Für den Fall, dass die zu streichende Zeile die Zeile i war, gehe zum nächsten i über und beginne erneut mit Schritt 1.
2. Gehe analog zu 1 für die Spalten vor. Betrachte dabei auch die Auszahlungen der mit einer Löschmarkierung versehenen Zeilen.
3. Streiche alle Zeilen und Spalten, die mit einer Löschmarkierung versehen sind.
4. Für den Fall der wiederholten Elimination, wiederhole Schritt 1 bis 3 so lange, bis man bei einem vollen i-Durchgang keine dominierte Strategie mehr findet.

Beispiel 7.60.

Gegeben sei folgende Auszahlungsmatrix eines Nullsummenspiels in Normalform mit reinen Strategien. Die Strategien von Spieler 1 sind hier in den Spalten und die von Spieler 2 in den Zeilen aufgeführt. Da es sich um ein Nullsummenspiel handelt werden der Einfachheit halber nur die Auszahlungen von Spieler 2 dargestellt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Es besteht kein Grund für Spieler 2 eine dominierte Zeile zu wählen, wenn er mit einer anderen ein besseres Spielergebnis erreichen kann. Für ihn ist es wichtig, möglichst hohen Nutzen in seiner Zeile zu haben. Er kann diese Strategie außer Acht lassen und sich mit den Vor-und Nachteilen seiner anderen Strategien beschäftigen. Demnach lässt sich die obige Spielmatrix wie folgt reduzieren:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Für den Spaltenspieler, der an minimalen Einträgen interessiert ist, stellt man ähnliche Überlegungen an. Betrachtet man die erste und die dritte Spalte, wird deutlich, dass Spieler 1, egal welche Strategie er in der ersten Spalte der verkleinerten Matrix wählt, immer mehr verliert. Somit dominiert die erste die dritte Spalte. Da Spieler 2 sich ohnehin gegen die erste Zeile entscheidet, kann der Spaltenspieler die erste Spalte löschen und es ergibt sich eine weitere verkleinerte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Hier wird die dritte Zeile von der ersten dominiert und kann daher ebenfalls eliminiert werden. Dies ergibt folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Da hier die dritte Spalte die erste dominiert, eliminiert man die erste und erhält die folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist deutlich kleiner als die ursprüngliche und enthält keine dominierten Strategien mehr. ◇

In der Spielbaumdarstellung kann es von Vorteil sein das Spiel in Normalform zu übersetzen und mit Rezept 7.59. die dominierten Strategien zu eliminieren. Sucht man direkt im Spielbaum, streicht man die dominierten Züge in dieser Darstellung. Die nicht dominierten bleiben dann automatisch übrig. Man beginnt dabei immer mit Informationsbezirken, die direkt vor einem Endknoten liegen und arbeitet sich sukzessive nach vorn durch.

Beispiel 7.61.

In der folgenden Spielbaumdarstellung sollen die dominierten Strategien gestrichen werden.

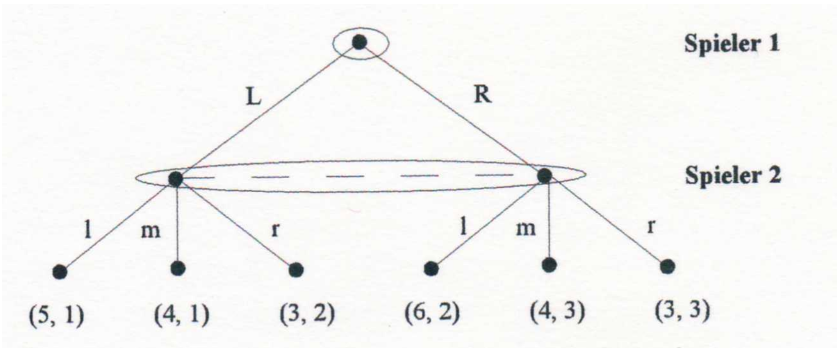


Abbildung 15: Spielbaum Beispiel 6.61 (Rieck, 2006, S.278)

Spieler 1 besitzt die Strategienmenge {L;R} und Spieler 2 die Strategienmenge {l;m;r}. Der Vergleich der 2. Komponente der Auszahlungsvektoren ergibt, dass r die Strategien m und l dominiert. Streicht man diese Zweige und vergleicht die Auszahlungsvektoren erkennt man, dass die Strategie R die Strategie L dominiert.

7.4.2 Wie findet man ein Gleichgewicht?

In 2×2 - Matrixspielen ist die Suche am einfachsten mit Hilfe von so genannten Abweichungsdiagrammen. Hierzu zeichnet man in die Spielmatrix die besten Erwiderungen in Form von Pfeilen ein. Die Pfeile deuten jeweils in die Richtung, in die ein Spieler abweichen würde, wenn er wüsste, dass der andere Spieler die dort eingetragene Strategie spielt. Weisen zwei Pfeile in ein Feld, handelt es sich um ein Gleichgewicht.

Allerdings wird diese Methode in Matrixspielen mit mehr als zwei reinen Strategien pro Spieler unübersichtlich.

In solchen Fällen verwendet man das folgende Rezept.

Rezept 7.62.

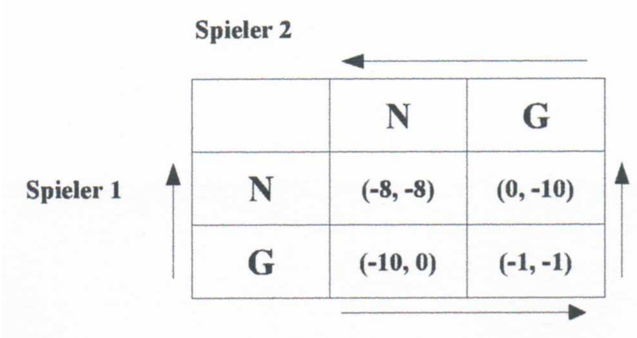
1. Betrachte nacheinander alle Spalten und markiere die beste Erwiderung des Zeilenspielers auf die jeweilige Spalte durch ein Kreuz im entsprechenden Matrixfeld. Kommt die höchste Auszahlung mehrfach vor, existieren mehrere beste Erwiderungen, die alle markiert werden.

2. Betrachte nun nacheinander alle Zeilen und markiere dort die beste Erwiderung des Spaltenspielers auf die jeweilige Zeile durch einen Kringel im betroffenen Matrixfeld.

3. Alle Matrixfelder, die sowohl ein Kreuz als auch einen Kringel aufweisen, sind Gleichgewichte. Treten in der Zeile kein weiterer Kringel und in der Spalte kein weiteres Kreuz auf, handelt es sich um den Fall der strikten Gleichgewichte.

Beispiel 7.63. Gefangenendilemma (Beispiel 6.12.)

Das Abweichungsdiagramm des Gefangenendilemmas ermittelt die Strategienkonfiguration (N,N) als Nash-Gleichgewicht.

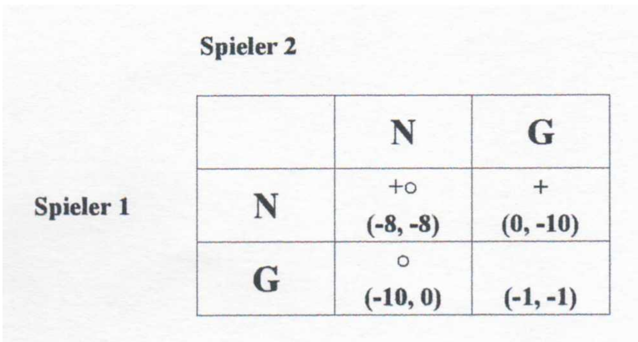


Spieler 2

Spieler 1		N	G
	N	(-8, -8)	(0, -10)
	G	(-10, 0)	(-1, -1)

Abbildung 16: Abweichungsdiagramm Gefangenendilemma

Wendet man Rezept 7.62. auf diese Matrix an, ergibt sich folgende Auszahlungstabelle, die ebenfalls die Strategienkonfiguration (N,N) als Nash-Gleichgewicht zeigt. Dieses ist jedoch kein striktes Gleichgewicht.



Spieler 2

Spieler 1		N	G
	N	+○ (-8, -8)	+ (0, -10)
	G	○ (-10, 0)	(-1, -1)

Abbildung 17: Gleichgewicht im Gefangenendilemma

Nach dieser Methode findet man jedoch nur reine Gleichgewichte in Matrixspielen. Gemischte Gleichgewichte zu finden ist um einiges komplizierter, da man unter anderem jedes Mal erneut abwägen muss. Man errechnet dazu den Erwartungswert eines Spielers und vergleicht anschließend die Strategien miteinander. Die Vorgehensweise ist also ähnlich wie in nichtdeterministischen Spielen, die noch einzeln aufgeführt werden.

In der Spielbaumdarstellung ermittelt man Gleichgewichte im Allgemeinen mit der Rückwärtsinduktion (Rezept 7.64). Allerdings handelt es sich hierbei auch nur um

Gleichgewichte in reinen Strategien. Des Weiteren setzt man bei diesem Verfahren voraus, dass es sich um deterministische Spiele, um Spiele ohne Zufallszüge, handelt. Im Prinzip kann man jedes extensive Spiel in ein Normalformspiel umschreiben und mit Rezept 7.62. nach den entsprechenden Gleichgewichten suchen. Handelt es sich dabei um Zwei-Personen-Spiele, ist dies auch die einfachste Methode. Allerdings erweist es sich bei Spielen mit mehr als zwei Personen als günstiger den entsprechenden Spielbaum mit der Rückwärtsinduktion zu untersuchen. Dort prognostiziert man, was in der Zukunft passieren wird und begründet dies rückwärts zurück in die Gegenwart. Zermelo wandte diesselbe Form der Begründung bereits 1912 in der Analyse von Schachspielen an. Aus diesem Grund wird die Rückwärtsinduktion bei Binmore (1992) auch Zermelos Algorithmus genannt. Die Rückwärtsinduktion ist eng mit der Eliminierung dominierter Strategien verbunden. Im Normalfall ist es einfacher teilspielperfekte als normale Nash-Gleichgewichte zu finden. Dazu wendet man die Rückwärtsinduktion auf jedes echte Teilspiel an und beginnt möglichst mit weit hinten liegenden. Anschließend arbeitet man sich nach vorn durch. Man prüft hier, von hinten beginnend, für jeden einzelnen Informationsbezirk, ob sich der jeweilige Spieler an die von seiner Gleichgewichtsstrategie vorgeschriebene Entscheidung hält. Ist dies nicht der Fall, liegt kein teilspielperfektes Gleichgewicht vor. Im Spezialfall endlicher Spiele mit vollständiger Information entspricht dieses Vorgehen der wiederholten Eliminierung dominierter Strategien.

Rezept 7.65. Rückwärtsinduktion Betrachte nacheinander alle Partien von den jeweiligen Endknoten ausgehend und arbeite die Schritte ab.

1. Färbe die betrachtete Partie rot.
2. Betrachte nacheinander alle Informationsmengen auf dieser Partie. Überprüfe, ob sich derjenige Spieler, dem die betrachtete Informationsmenge gehört, verbessern kann, indem er einen Zug wählt, der nicht auf der betrachteten Partie liegt. Prüfe dazu einzeln
   (a) Kann der Spieler einen für ihn besseren Spielausgang erzwingen? Wenn ja, ist diese Partie keine Gleichgewichtspartie. Betrachte die nächste Partie und beginne mit Schritt 1.
   (b) Kann er durch die Abweichung einen Endknoten erreichen, der ihn besser stellt? Wenn ja, färbe alle Züge aller Gegenspieler grün, die zu solchen Endknoten führen.
   (c) Kann er überhaupt einen Endknoten erreichen, der für ihn besser ist als die rot gefärbte Partie? Wenn ja, betrachte den nächsten Informationsmenge auf der Partie und beginne wieder mit 2.

3. Kann an keiner der Informationsmengen einer der Spieler eine Verbesserung durch Abweichung erzielen, ist die rot gefärbte Partie eine Gleichgewichtspartie.

4. Notiere für jeden an der Partie beteiligten Spieler alle Strategien, die ausschließlich rot und keine grün gefärbten Züge enthalten. Dies sind die zur Gleichgewichtspartie führenden Strategien.

5. Durfte ein Spieler auf der Gleichgewichtspartie nie entscheiden, notiere alle seine Strategien.

6. Bilde alle möglichen Strategienvektoren aus den notierten Strategien. Alle auf diese Art gebildeten Vektoren sind Gleichgewichte.

7. Lösche alle Markierungen und beginne mit der nächsten Partie mit Schritt 1.

Beispiel 7.65. In diesem Zusammenhang wird das Markteintrittsspiel (Beispiel 7.41.) noch einmal aufgegriffen. Es ist bereits bekannt, dass die Strategienkonfiguration (E,C) das gesuchte Nash-Gleichgewicht ist. Zur Ermittlung dieses Gleichgewichtes hat man die Rückwärtsinduktion angewandt. Der mögliche Konkurrent weiß, dass der Monopolist, wenn er in den Markt eintritt, entweder durch aggressives oder kooperatives Verhalten reagieren kann. Aus der Sicht des Monopolisten ist das kooperative Verhalten optimal. Deshalb antizipiert der mögliche Konkurrent, dass der Monopolist auf einen Markteintritt mit kooperativem Verhalten reagieren wird. Daher ist es für ihn optimal in den Markt einzutreten.

Man erkennt ein striktes Gleichgewicht daran, dass erstens kein Spieler von der Gleichgewichtspartie abweichen kann, ohne dabei seine Auszahlung zu verändern und zweitens keiner der Spieler von der Gleichgewichtspartie unberührte Informationsbezirke besitzt. Bei einem nicht strikten Gleichgewicht besteht die Möglichkeit, dass die Gewinne manchmal gleich bleiben.

Handelt es sich um ein nichtdeterministisches Spiel, in dem Zufallszüge vorkommen, müssen die Gewinne mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtet werden. Betrachtet man nur den Fall der Spielbaumdarstellung, die stets in Matrixspiele übersetzt werden können und umgekehrt, besteht die Möglichkeit die Erwartungsauszahlungen an die Endknoten zu schreiben und anschließend die Rückwärtsinduktion anzuwenden.

Beispiel 7.66. Betrachte folgenden Spielbaum aus Beispiel 7.61.

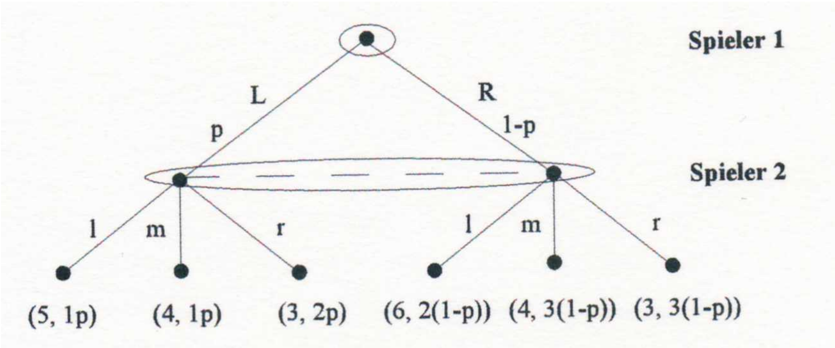


Abbildung 18: Spielbaum nichtdeterministisches Spiel

Man nimmt hier an, dass Spieler 1 mit Wahrscheinlichkeit p seinen Zug L und mit Wahrscheinlichkeit (1-p) seinen Zug R spielt. Dann ist es möglich an die Endknoten die gewichteten Auszahlungen von Spieler 2 zu notieren. Um nun zu bestimmen, bei welchen Wahrscheinlichkeiten p der Zug r besser ist als m, vergleicht man die Erwartungsauszahlungen der einzelnen Züge miteinander und ermittelt für welche p $H(m) < H(r)$ erfüllt ist. Einsetzen ergibt $1p + 3(1-p) < 2p + 3(1-p) \Leftrightarrow 0 < p$. Das bedeutet nach Rieck (2006) nichts anderes, als dass r fast immer besser ist als m. Bei p = 0 wären die Strategien m und r gleichbedeutend.

(Rieck, 2006, S.281f.)

7.4.3 Wie findet man ein (trembling-hand) perfektes Gleichgewicht mit Hilfe der Agentennormalform?

An allen Knoten, an denen der gleiche Spieler handeln muss, entscheiden jeweils unabhängige Agenten des Spielers. Fehler, die den Agenten unterlaufen, passieren daher unabhängig von vorangegangenen Fehlern. Diese Darstellung stellt nun sicher, dass den Spielern keine korrelierten Fehler unterlaufen können. Man benutzt diese Darstellungsform, um (trembling-hand) perfekte Gleichgewichte zu ermitteln. In der Normalformdarstellung sind kleine Störungen stets korreliert. In der Spielbaumdarstellung dagegen sind sie unkorreliert. Man stellt daher zunächst einen Spielbaum auf und schreibt an jeden Ast die Wahrscheinlichkeiten des jeweiligen Spielers bzw. Agenten und ermittelt mit Hilfe der Pfadregel die Wahrscheinlichkeit dieses Pfades. Anschließend gewichtet man die zugehörige Normalform mit den entstandenen Wahrscheinlichkeiten und prüft die bereits ermittelten Gleichgewichte auf ihre (trembling-hand) Perfektheit.

Beispiel 7.67. Berechnung der (trembling-hand) Perfektheit in Normalformspielen

		Spieler B	
		links	rechts
Spieler A	oben	(9,9)	(0,9)
	unten	(9,0)	(1,1)

Abbildung 19: Beispiel (trembling-hand) Perfektheit

Gegeben sei die obere Auszahlungstabelle. Die Gleichgewichte in reinen Strategien lauten (oben, links) und (unten,rechts), wobei (oben, links) ein Gleichgewicht in dominierten Strategien darstellt. Angenommen Spieler A wählt, bedingt durch einen leichten Tremor, mit Wahrscheinlichkeit ϵ seine Strategie *unten*. Da im Gleichgewicht immer wechselseitig beste Antworten gespielt werden, ist (oben, links) kein perfektes Gleichgewicht. Hierzu prüft man, ob die folgende Ungleichung für die Perfektheit erfüllt ist. Da Spieler A zittert, müssen wir die Auszahlungen von Spieler B gewichten:

$H(oben, links) \geq H(oben, rechts) \Leftrightarrow (1-\epsilon)\cdot 9 + 0 \cdot \epsilon \geq (1-\epsilon)\cdot 9 + 1 \cdot 9$

Für ein immer weniger werdendes Zittern ($\epsilon \to 0$) ist die Ungleichung nicht erfüllt. Daher ist (oben, links) kein teilspielperfektes Gleichgewicht.

Ebenso geht man vor, wenn Spieler B in seiner Strategienwahl zittert.$\diamond$

(Rieck, 2006, S.228ff.)

Teil III

Praxis der Spieltheorie in der Schule

8 Unterrichtsentwurf

8.1 Einleitung

In einer ständig komplexer werdenden Welt, muss man immer wieder Entscheidungen treffen, die die Zukunft beeinflussen. Welche prinzipiellen Herangehensweisen gibt es für solche Situationen? Die hier vorgestellte Anwendung der Spieltheorie ist für den Einsatz in Mathematik Arbeitsgemeinschaften oder eventuell mathematisch orientierten Projekttagen konzipiert. Die Zielgruppe sind Schüler der Jahrgangsstufen 10 bis 13. Da der Kernlehrplan NRW für das Fach Mathematik in den Jahrgangsstufen 5 bis 10 neben der Förderung des Kompetenzbereiches des mathematischen Modellierens zur Lösung realitätsnaher Probleme den Kompetenzbereich des Argumentierens und Kommunizierens verlangt, ist es in meinen Augen sehr sinnvoll, die interessierten Schüler in dieser Richtung weiter zu fordern und zu fördern. Das mathematische Teilgebiet der Spieltheorie bietet dazu einen guten Anreiz. Hier ist es insbesondere außerhalb des Pflichtunterrichtes möglich, über zum Teil offene Aufgaben das Umfeld selbständig zu erkunden und zu experimentieren. Den Schülern wird hier Raum für eigene Fragestellungen sowie eigene Vermutungen und Zielsetzungen gegeben.

8.2 Zur Situation der Lerngruppe

An diesem Projekt nehmen freiwillige und mathematisch interessierte Schüler der Jahrgangsstufen 10 bis 13 teil. Die an mathematischen Denksportaufgaben interessierte Lerngruppe trifft sich alle zwei Wochen für 90 Minuten im Anschluss an den Regelunterricht, um an solchen Problemen zu arbeiten. Meist beschäftigen sie sich mit dem Lösen von mathematischen Knobelaufgaben. Außerdem erarbeiten sie gemeinsam anschauliche Strategien, mit denen verschiedene mathematische Probleme gelöst werden können. Die meisten Schüler nehmen regelmäßig an verschiedenen Wettbewerben teil und werden deshalb auch durch spezielle Übungen auf diese vorbereitet. Das Lernklima innerhalb der Gruppe ist außerordentlich positiv. Die Schüler arbeiten meist in einzelnen Gruppen, die sich , je nach gewählten Themen oder Aufgaben der jeweiligen Einheit, bilden, weitgehend selbständig. Sie haben außerdem die Möglichkeit diese Arbeitsgemeinschaft aktiv mitzugestalten, indem sie beispielsweise konkrete Aufgaben oder Beispiele mitbringen. Als betreuende Lehrkraft biete ich den Schülern verschiedene Aufgaben aus unterschiedlichen Bereichen an. Ihnen ist bekannt, dass ich mich bei Fragen oder auftretenden Problemen als Berater zur Verfügung stelle, aber ansonsten im Hintergrund agiere. Es herrscht stets eine sehr lockere Atmosphäre. Die Schüler sind aufgrund den ständig neu zusammengesetzten Gruppen gewohnt, miteinander zu arbeiten und sich auch untereinander zu helfen. Nicht selten konzentriert sich die Arbeit der Schüler auf ein oder zwei Problemstellungen. Die hier im Folgenden eingesetzte Unterrichtsform des Gruppenpuzzles kennen die Schüler aus dieser Arbeitsgemeinschaft zwar noch nicht, aber ich denke, dass aufgrund meiner sehr positiven Erfahrungen keine Probleme auftreten werden. Die Schüler besitzen bereits Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus der Mittelstufe. Sie können mit den grundlegenden Gesetzen der Wahrscheinlichkeit umgehen. Dazu gehören Laplaceexperimente, die Summen- und Pfadregel und sowie ihre Anwendungen in mehrstufigen Zufallsexperimenten, Bernoulliexperimente, der Satz von Bayes und der Umgang mit Erwartungswerten.

8.3 Zur Didaktik und Methodik

Diese Einheit zur Spieltheorie, die mindestens zwei Treffen der Arbeitsgemeinschaft umfassen soll, ist eine neue Erfahrung für die Teilnehmer. Es wird ein Gruppenpuzzle organisiert. Die zu bearbeitenden Bereiche werden auf unterschiedliche Gruppen verteilt und jede der Gruppen bereitet ihr Thema für die gesamte Lerngruppe auf. Anschließend werden die Gruppen neu zusammengestellt und in jeder Gruppe sitzt jeweils ein Experte für jedes Thema. Hierbei handelt es sich um eine Form kooperativer und selbständiger Arbeit, die nach Leuders (2003) dem Prinzip des *Lernens durch Lehren* folgt. Er ergänzt, dass die Schüler bei dieser Arbeitsform mehr lernen als nur die zu bearbeiteten Inhalte. Die Lehrkraft handelt während dieser Phase im Hintergrund des aktiven Unterrichtsgeschehens und besitzt eine beratende Funktion.

Die Einheit beginnt mit einer offenen Fragestellung zum Gefangenendilemma, die den Schülern in Form eines Arbeitsblattes an die Hand gegeben wird. Hier werden die Schüler in die Situation eines der im Gefangenendilemma befindlichen Häftlings versetzt. Sie sollen abwägen und am Ende entscheiden, welche Aktion sie in dieser Situation ohne Kommunikationsmöglichkeit wählen. Die Schüler haben hierzu die Möglichkeit sich mit den Mitschülern auszutauschen. Anschließend sollen die Lösungen in der Gesamtgruppe kurz vorgestellt und diskutiert werden. Die Auflösung und den effektivsten Weg, um nach der besten Entscheidung zu suchen, soll noch im Raum stehen bleiben und wird in der Gruppenarbeitsphase erneut aufgegriffen. Im nächsten Schritt geht es darum die mathematischen Problemlösestrategien für spieltheoretische Fragestellungen zu erkunden. Hierzu wird mit Hilfe eines Gruppenpuzzles die benötigte Theorie zur Analyse selbständig anhand vorgefertigter Materialien erarbeitet. Die hierzu erstellten Arbeitsblätter werden im Anschluss angeführt. Diese Theorie soll zur systematischen Lösung außermathematischer Probleme beitragen. Für die Schüler, die je nach Alter bereits mehr oder weniger Erfahrungen im Umgang mit Problemlösen besitzen, stellt dies eine Erweiterung ihres Strategienrepertoires dar. Die Strategienkarten nach Leuders (2005) bilden hier das Fundament des bereits vorhandenen Wissens. Das Prinzip des Gruppenpuzzles besteht darin, dass die Schüler sich zunächst in so genannten Stammgruppen zusammenfinden. In diesem speziellen Fall entstehen durch selbständige Gruppenfindung der Schüler zwei Stammgruppen. Im Anschluss wird innerhalb einer Stammgruppe an jeden Schüler dasselbe Arbeitsmaterial ausgeteilt. Jede Stammgruppe erhält von mir entsprechendes Material zu einer Darstellungsform strategischer Spiele. Gruppe I beschäftigt sich mit der Normalform und Gruppe II mit der Spielbaumdarstellung. Nach einer Lesephase hat jeder Schüler die Möglichkeit sich mit den anderen Mitgliedern seiner Gruppe auszutauschen. Ziel der Schüler soll es sein, ein Experte auf dem erarbeiteten Teilgebiet zu werden. Anschließend lösen die Schüler in der jeweiligen Stammgruppe das Schwarzmarkthändler-Dilemma, eine Variation des bereits bekannten Gefangenendilemmas. Im nächsten Unterrichtsschritt lösen sich die Gruppen I und II auf und es bilden sich jeweils neue Zweiergruppen[29] mit jeweils einem Experten aus I und II. Beide Schüler der Zweiergruppe haben nun die Aufgabe, die Inhalte auszutauschen und sich ergebende Verknüpfungen zu erarbeiten. Sie erhalten außerdem ein Arbeitsblatt, dass die Übersetzung der beiden Darstellungsformen problematisiert und eine Hilfsdarstellung, die Agentennormalform, vorstellt. Nach Beendigung dieser Arbeit kehren alle wieder in ihre ursprüngliche Gruppe zurück und haben erneut die Möglichkeit sich zu beraten. Anschließend soll innerhalb der Stammgruppen eine gemeinsame Aufgabe gelöst werden, die am Ende in der gesamten Lerngruppe noch einmal aufgegriffen und besprochen werden soll. Hierbei handelt es sich um Aufgabe 1 des sich anschließenden Arbeitsblattes („Der seltsame Fall des Lord Strange"). Nach einer kurzen, sich anschließenden Besprechung werden den Schülern die restlichen Aufgabenblätter zur freien Arbeit ausgeteilt. Den weiteren Verlauf bestimmen die Schüler somit selbst. Ihnen werden unterschiedliche Aufgaben von Spielen und Spielmodellen angeboten, die sie je nach Interesse bearbeiten können. Die jeweiligen Lösungen, die ebenfalls in den Materialien ausgearbeitet wurden, können sie bei Bedarf bei mir als Lehrkraft einsehen. Sollte die Zeit der ersten Einheit entweder am Ende der Expertengruppenarbeit oder zu Beginn bzw. Mitte der zweiten Stammgruppenarbeit verstrichen sein, erhalten die Schüler die Aufgabe, sich zu Hause noch einmal mit den Gruppenarbeitsblättern auseinander zu setzen, da in der langen Zwischenzeit wieder viel vergessen werden kann und dies die Wiederaufnahme des Themas in der nächsten Einheit erschwert. Dies ist insbesondere dann der Fall,

[29] In Ausnahmefällen, bei ungerader Schüleranzahl an diesem Tag, wird eine Dreiergruppe gebildet.

wenn die Schüler noch keine Aufgaben selbst gelöst haben. Des Weiteren soll am Beginn der zweiten Einheit eine kurze Wiederholung in Form eines Mind-Maps an der Tafel erfolgen.

(Leuders, 2003, S.119ff., 321f. / Kernlernplan NRW)

8.4 Ziel der Einheit

Den Schülern soll ein kleiner Einblick in die Methoden der nicht kooperativen Spieltheorie gegeben werden, die in der Ökonomie und Wirtschaft eine große Rolle spielt. Außerdem soll ihr bereits vorhandenes Problemlösestrategienrepertoire erweitert werden. Hier soll ihnen erneut verdeutlicht werden, dass eine enge Verbindung zwischen den Modellierungsmöglichkeiten, die die Mathematik bietet, und realen Problemen unterschiedlicher Natur existiert. Des Weiteren sollen sie für den Umgang mit Spielen und Spielsituationen, auch wenn dies nur in einem sehr kleinen Rahmen möglich ist, sensibilisiert werden. Ferner soll es den Schülern helfen auch in noch so abstrakt erscheinenden Situationen in Zukunft ein modellierbares Spiel zu sehen. Letztlich soll den Schülern aber auch bewusst werden, dass die Spieltheorie nicht nur reale Situationen naturgetreu abbildet und löst, sondern auch prinzipielle Lösungsstrategien für bestimmte Konfliktklassen wie das bekannte Gefangenendilemma entwickelt und grundsätzliche Fragen zu klären versucht, die mit Entscheidungen in sozialen Situationen zusammenhängen.

Die folgenden Arbeitsblätter und Materialien sind für den Einsatz in dieser Unterrichtsreihe konzipiert. Hierbei werden für die Schüler relevante Abschnitte aus der obigen Arbeit zitiert. Eine weitere Quelle stellt [42] dar. Die allgemeinen Informationen zur Spieltheorie und einige Begriffe wiederholen sich in den Materialien der Stammgruppen I und II, da es sich um Arbeitsblätter für eine spezielle Form der Gruppenarbeit handelt und die Schüler auf denselben Informationsstand gebracht werden sollen. Die sich anschließenden Aufgaben wurden aus unterschiedlichen Quellen entnommen. Die Quelle ist der jeweiligen Aufgabe zugefügt, sofern sie nicht in Beispielen (siehe Beispiel 6.12. und 7.14.) bereits behandelt wurden.

8.5 Materialien

8.5.1 Einstieg Gefangenendilemma

Sie werden verhaftet, weil sie verdächtigt werden, mit einem Komplizen einen Raubüberfall begangen zu haben. Die Beweislage reicht aber nur zu einer Verurteilung wegen illegalen Waffenbesitzes. Um den Raubüberfall zu klären, werden sie beide getrennt voneinander verhört. Sie haben keine Möglichkeit miteinander zu kommunizieren. Beiden von ihnen stehen zwei Handlungsalternativen zur Verfügung: Entweder Kooperation mit dem Partner und schweigen oder aber Verrat des Partners.

Jeder von ihnen wird während des laufenden Verhörs auf die folgenden Punkte hingewiesen:

1. Gesteht keiner von ihnen, erhalten sie beide ein Jahr Gefängnisstrafe, da der Haftrichter lediglich illegalen Waffenbesitz nachweisen kann.
2. Gestehen sie beide, erhält jeder acht Jahre Haft aufgrund mildernder Umstände.
3. Gesteht nur einer von beiden, wird der Geständige aufgrund der Kronzeugenregelung frei gelassen und der andere erhält zehn Jahre Gefängnisstrafe.

Frage Wie würden sie in dieser Situation handeln?

8.5.2 Material Stammgruppe I: Spiele in Normalform

Allgemeine Einführung in die Spieltheorie

Die Spieltheorie ist eine angewandte mathematische Theorie zur Beschreibung strategischer Spiele und wird in der Wissenschaft hauptsächlich der Unternehmensforschung und der Volkswirtschaftslehre zugeordnet. Sie stellt die Methoden zur Verfügung, um Spiele oder spielähnliche Situationen analysieren zu können. Der Spielbegriff ist in diesem Zusammenhang als Metapher zu sehen. Man untersucht in der Regel Situationen, die durch menschliches Verhalten beeinflusst werden. Die Spieltheorie dient zum einen der Analyse von Gesellschaftsspielen und zum anderen zur Lösung von wirtschaftspolitischen oder sozialen Konflikten. Allgemein ist ein Spiel daher eine Interaktion zwischen den beteiligten Personen (**Spieler**). Die Spieler haben zu verschiedenen Zeitpunkten unterschiedliche Möglichkeiten (**Strategien**) innerhalb eines bestimmten Regelwerks (**Spielregeln**) zu handeln, da ansonsten die Entscheidungen nicht näher untersucht werden müssten. Am Ende eines Spiels findet in den meisten Fällen eine Gewinnauszahlung statt, die sowohl positiv als auch negativ ausfallen kann. Das Ziel eines jeden Spielers ist die Maximierung seines Gewinns bzw. die Minimierung seines Verlustes. Da der Gewinn oder Verlust von den Entscheidungen seiner Mitspieler abhängt, ist deren Handeln auch für ihn von Interesse und er versucht es vorherzusehen. Dem einzelnen Spieler geht es dabei lediglich um die Auswirkungen fremder Handlungen auf seine Auszahlungen. Was die anderen Spieler letztendlich verlieren oder gewinnen, ist für ihn nicht von Interesse. Man spricht in diesem Zusammenhang von einem rational handelnden Spieler.

Elemente eines Spiels

Es existiert eine Vielzahl verschiedenartiger Spiele, die mit der Spieltheorie untersucht werden. Um nicht jedes einzelne Spiel explizit analysieren zu müssen und ähnliche Strukturen bereits untersuchter Spiele nutzen zu können, erfolgt eine weitere Kategorisierung nach Merkmalen und deren Varianten.

- **Anzahl der Spieler:**
  - **2** (Schach)
  - **mehr** (Mensch ärgere dich nicht)
- **Anzahl der Spielzüge bis das Spiel beendet ist:**
  - **1** (Münzwurf)
  - **feste Zahl** (Skat)
  - **beliebige/variable Zahl** (Schach)

- **Anzahl der Wahlmöglichkeiten pro Spielzug:**
  - **2** (Kopf oder Zahl)
  - **mehr** (Schach)
- **Spielsequenz:**
  - **gleichzeitig** (Schere Stein Papier)
  - **hintereinander** (Schach)
- **Informationsgehalt:**
  - **vollständig** (Schach)
  - **unvollständig** (Poker)
- **Auszahlung:**
  - **Nullsumme** (Schere Stein Papier)
  - **Nichtnullsumme** (Gefangenendilemma)
- **Schicksal:**
  - **zufällige Züge** (Würfelspiel)
  - **keine zufälligen Züge** (Schach)

Bei den Auszahlungen unterscheidet man in der Regel zwischen Nullsumme und Nichtnullsumme. In einem Nullsummenspiel addieren sich Gewinne und Verluste aller Spieler insgesamt auf Null. Bei Nichtnullsummenspielen ist dies nicht der Fall. Die Art der Auszahlung ist dabei nicht auf Geldeinheiten oder Güter beschränkt. Beispielsweise werden die Auszahlungen im Gefangenendilemma in Gefängnisjahren angegeben.

Der Informationsgehalt wird in der obigen Auflistung in vollständige und unvollständige Information gegliedert. Bei Spielen mit vollständiger Information (Schach) sind dem Spieler vor jedem Spielzug alle bis dahin durchgeführten Spielzüge bekannt. Alle gängigen Kartenspiele haben im Gegensatz dazu einen unvollständigen Informationsgehalt, da die Karten der Mitspieler unbekannt sind.

Wir beschäftigen uns hier mit dem Teilgebiet der **nichtkooperativen Spieltheorie**. Hier sind zwischen den Spielern keine bindenden Absprachen und Verträge möglich. Bei den folgenden Spielmodellierungen geht man stets davon aus, dass das Aufeinandertreffen der gewählten Strategien zu einem Spielergebnis führt, welches anhand der Auszahlungen bewertet wird. Mit der Durchführung des Spiels ist die

Interaktion der Spieler somit abgeschlossen. Außerdem nimmt man zur Vereinfachung an, dass der Spielausgang keinen Einfluss auf das Spielverhalten hat, wenn die Spieler erneut aufeinander treffen sollten.

Spiele in Normalform

In diesem Modell entscheiden sich alle Spielteilnehmer gleichzeitig für eine Strategie. Daher ist das Normalformspiel immer als ein Ein-Zug-Spiel dargestellt.

Das bereits bekannte Gefangenendilemma soll nun in mathematischer Form beschrieben werden. Dazu werden in der Normalformdarstellung Matrizen oder Tabellen verwendet.

Die beiden Gefangenen haben die Wahl zwischen den Strategien gestehen (G) und nicht gestehen (N), die Elemente ihrer jeweiligen **Strategienmenge** sind. Es besteht nun die Möglichkeit die Spielergebnisse und die entsprechenden Auszahlungen in einer Tabelle (**Normalform**) darzustellen. In diesem Fall werden die Gefängnisjahre in negativen Auszahlungen dargestellt.

		mein Komplize (Spieler 2) G	mein Komplize (Spieler 2) N
Ich (Spieler 1)	G	(- 8, -8)	(0, -10)
	N	(-10,0)	(-1,-1)

Abbildung 20: Normalform Gefangenendilemma

Spieler 1 wählt als Zeilenspieler ab jetzt immer eine der beiden Zeilen. Ebenso wählt Spieler 2 als Spaltenspieler die entsprechende Spalte. Entscheidet sich beispielsweise Spieler 1 für ein Geständnis und Spieler 2 für Schweigen, erhält Spieler 1 die Freiheit zurück und Spieler 2 muss für 10 Jahre ins Gefängnis.

Normalformspiele werden mit einem Minimum an formalen Konzepten beschrieben. Die Zugfolge, der jeweilige Informationsstand der Spieler und alle weiteren benötigten Angaben werden nicht explizit aufgeführt. Diese Darstellung kann oftmals von großem Nutzen sein, da höchst komplizierte Entscheidungsprobleme auf die wesentlichen Kernentscheidungen reduziert werden.

Strategien

Die Menge aller möglichen Strategien eines Spielers bezeichnet man als Strategienmenge. Besteht das Spiel aus mehreren Spielzügen, existieren in der Regel auch mehrere Situationen, in denen sich ein Spieler für eine Aktion entscheiden muss. Im Spiel Gefangenendilemma haben beide Spieler jeweils eine Strategienmenge, die aus zwei Elementen besteht. In diesem einfachen Fall ist eine Strategie der Plan, eine bestimmte Aktion aus der Strategienmenge durchzuführen.

In einem Spiel mit mehreren Zügen bedeutet der Besitz einer Strategie, dass man vor Beginn des Spiels festgelegt hat, wie man in jeder möglichen Spielsituation handelt. Aus mathematischer Sicht ist eine Strategie daher eine Funktion, die jeder Spielsituation ein Element der Strategienmenge zuordnet. Eine Kombination von Strategien, zu der jeder Spieler genau eine seiner Strategien beisteuert, bezeichnet man als **Strategienkonfiguration**. Im Beispiel des Gefangenendilemmas führt jeder Spieler nur einen Spielzug aus: Entweder er gesteht oder er schweigt. Jeder der beiden hat nur zwei Strategien und demzufolge hat der Strategienraum auch zwei Elemente. Eine Strategienkonfiguration (N,G) wäre beispielsweise, wenn der erste N und der zweite G wählen würde.

Bisher haben wir uns ausschließlich mit so genannten **reinen Strategien** beschäftigt. Reine Strategien werden immer mit Wahrscheinlichkeit 1 gespielt. Neben den reinen kann man auch **gemischte Strategien** spielen. Lässt man beispielsweise eine Münze oder einen anderen Zufallsmechanismus entscheiden, welche Strategie als nächstes ausgespielt werden soll, spielt man eine gemischte Strategie. Im Folgenden konzentrieren wir uns allerdings zunächst auf die reinen Strategien.

Nachdem die benötigten Begriffe eingeführt wurden, beschäftigen wir uns nun mit der Frage „Welche Strategie ist für einen Spieler optimal?“ Der Aktionsplan eines Spielers ist genau dann gut und im besten Fall optimal, wenn er eine möglichst hohe Auszahlung erzwingen oder den eintretenden Verlust so gering wie möglich halten kann.

Lösungskonzepte

Einige Spiele besitzen besondere Eigenschaften, die wir mit Hilfe des Gefangenendilemmas an dieser Stelle genauer betrachten wollen. Der Reiz im Gefangenendilemma besteht darin, dass Entscheidungen, die für den einzelnen vernünftig sind, für die Gruppe keine optimalen oder sogar noch schlechtere Konsequenzen nach sich ziehen.

Angenommen ihr Komplize erfährt aus irgendeinem Grund doch, dass sie gestehen. Dann hat er die Wahl zwischen acht (G) und zehn Jahren Gefängnis (N). Gestehen ist demnach eindeutig die bessere Wahl. Erfährt er, dass sie nicht gestehen, kann er zwischen seiner Freiheit (G) und einem Jahr Gefängnis (N) wählen. Es leuchtet ein, dass auch in diesem Fall ein Geständnis die beste Entscheidung für ihren Komplizen ist. Da die Strafverteilung für sie beide gleich ist, kann die Situation von der anderen Seite ebenso betrachtet werden. Angenommen sie haben sich beide dazu entschieden ein Geständnis abzulegen und ihre Entscheidung wird dem anderen mitgeteilt. Anschließend haben sie noch einmal die Chance getrennt voneinander ihre Entscheidung rückgängig zu machen. Was werden sie tun? Keiner von ihnen kann für sich selbst eine bessere Situation erzwingen, wenn er sich für die andere Alternative (N) entscheidet. Sie werden also beide weiterhin ein Geständnis ablegen.

Eine Strategienkonfiguration, die solch eine stabile Situation beschreibt, bezeichnet man in der Spieltheorie auch als **Nash-Gleichgewicht**. Das Nash-Gleichgewicht im Gefangenendilemma lautet daher (N,N) bzw. (-8,-8). Gleichgewichte sind Lösungen, die sich dadurch auszeichnen, dass die Spieler ihre Strategienwahl nicht revidieren wollen. Es gibt eine Lösung an, in dem rationales, d.h. vernünftiges Verhalten der Spieler beschrieben wird. Die Definition des Nash-Gleichgewichtes, einer der wichtigsten Begriffe und das meist genutzte Lösungskonzept der Spieltheorie, geht auf den Mathematiker John F. Nash zurück. Ein Nash-Gleichgewicht muss nicht zwingend existieren oder eindeutig sein. Es gibt Spielsituationen und folglich entsprechende Normalformen in denen keine oder mehrere Nash-Gleichgewichte existieren.

Optimale Strategien

Optimale reine und auch gemischte Strategien sollen nun durch konkrete Berechnungen ermittelt werden. Zunächst betrachten wir allerdings noch zwei Spezialfälle des Nash-Gleichgewichtes.

1. Konzept der strengen Dominanz

Eine streng **dominante Strategie** eines Spielers ist diejenige Strategie, die ihm unter allen verfügbaren Strategien den höchsten Nutzen verschafft. Ist dies nicht für jede verfügbare Strategie der Fall, handelt es sich um eine schwach dominante Strategie. Beispielsweise dominiert eine Entscheidung A eine Entscheidung B streng, wenn bei jedem Verhalten der anderen Spieler A besser ist als B. Dagegen dominiert A Entscheidung B schwach, wenn A bei jedem Verhalten der Mitspieler mindestens gleich gut ist wie B und mindestens in einem Fall besser. Verfügt in einem Spiel jeder über eine streng dominante Strategie, so ist es offensichtlich für jeden Spieler vernünftig diese zu spielen. Ein Spieler kann maximal eine streng dominante Strategie besitzen. Eine Strategienkonfiguration ist ein **Gleichgewicht in dominanten Strategien**, wenn alle Spieler ihre dominante Strategie wählen. Dieses Konzept ist aus individueller Sicht sehr überzeugend, auch wenn es leider nicht immer zu zufriedenstellenden Auszahlungen für alle Beteiligten führt. Es schließt zwar bestimmte Verhaltensweisen aus, aber es gibt nicht konkret an, welche Aktion beispielsweise durchgeführt werden soll. Da in den meisten Situationen die optimale Strategie eines Spielers von den anderen Mitspielern abhängt, ist dies ein sehr spezielles Lösungskonzept. Daher gibt es sehr viele Spiele, die kein Gleichgewicht in streng dominanten Spielen besitzen.

2. Konzept der Eliminierung dominierter Strategien

Existiert in einem Spiel keine streng dominante Strategie, ist es für die einzelnen Spieler wichtig zu antizipieren, was der Gegner für eine Strategie wählt, da der eigene Vorteil einer Strategie von der Strategienwahl des Gegners abhängt. Zum Vergleich von zwei Strategien verwendet man das **Konzept** der **paarweisen Dominanz**. Hier vergleicht man die Strategienkonfigurationen. Eine **Strategienkonfiguration ist dominiert**, wenn wenigstens ein Element des Tupels dominiert ist. Eliminiert man sukzessive dominierte Strategien, ist es durchaus möglich, dass sich neue Strategien als dominant herausstellen. Durch dieses Verfahren wird die Situation vereinfacht und die Strategienwahl liegt schließlich nahe. In den meisten Fällen existieren allerdings keine dominanten Strategien. Dann ist das Spiel auf diese Art nicht lösbar.

Existieren in einem Spiel mehrere Nash-Gleichgewichte, kann man durch Verfeinerungen der Situation versuchen, unplausible Gleichgewichte auszuschließen. Man überprüft, ob das Gleichgewicht gegenüber kleinen Störungen robust ist. Die Idee ist, dass die Spieler ihre reinen Strategien nicht mit hundert prozentiger Sicherheit wählen können und mit einer geringen Wahrscheinlichkeit Fehler machen. Hierbei handelt es sich um keine Denkfehler. Man stellt sich in diesem Zusammenhang einen Spieler vor, der mit zitternder Hand den Aufzugsknopf, den er eigentlich drücken wollte, verfehlt und im falschen Stockwerk landet. Gelingt es das Zittern Stück für Stück bis zum völligen Verschwinden zu unterdrücken, erhält man ein perfektes Gleichgewicht. Daher definiert man **(trembling-hand) perfekte Gleichgewichte** als Grenzwert von Nash-Gleichgewichten in gestörten Spielen, wobei der Spieler immer weniger zittert. Diese (trembling-hand) perfekten Gleichgewichte sind eine echte Teilmenge der Nash-Gleichgewichte.

Praktische Lösungsverfahren

Zunächst schaut man nach streng dominanten Strategien in einer Auszahlungstabelle. Sieht man auf den ersten Blick keine, wendet man sich den dominierten Strategien zu.

Wie findet man dominierte Strategien in Normalformspielen? Mit dem Ziel das Nash-Gleichgewicht in einer Bimatrix erreichen zu wollen, beginnt man alle Reihen und Spalten, die zu strikt dominierten Strategien gehören, zu eliminieren. Folgendes Verfahren hilft alle dominierten Strategien in Matrixspielen zu finden.

Rezept 8.1.

1. Betrachte nacheinander alle Zeilen. Die gerade betrachtete sei i.
   (a) Betrachte nacheinander alle noch nicht gestrichenen folgenden Zeilen i + 1,..., i + j, wobei sich die Anzahl der Folgezeilen bei jedem Durchlauf um 1 verringert und vergleiche sie jeweils mit der i-ten.
   (b) Überprüfe, ob eine der beiden betrachteten Zeilen die andere dominiert. Wenn nein, gehe zu r nächsten nicht gestrichenen über. Wenn ja, versehe die dominierte Zeile mit einer Löschmarkierung. Für den Fall, dass die zu streichende Zeile die Zeile i war, gehe zum nächsten i über und beginne erneut mit Schritt 1.

2. Gehe analog zu 1 für die Spalten vor. Betrachte dabei auch die Auszahlungen der mit einer Löschmarkierung versehenen Zeilen.

3. Streiche alle Zeilen und Spalten, die mit einer Löschmarkierung versehen sind.

4. Für den Fall der wiederholten Elimination, wiederhole Schritt 1 bis 3 so lange, bis man bei einem vollen i-Durchgang keine dominierte Strategie mehr findet.

Beispiel 8.2.

Gegeben sei folgende Auszahlungsmatrix eines Nullsummenspiels in Normalform mit reinen Strategien. Die Strategien von Spieler 1 sind hier in den Spalten und die von Spieler 2 in den Zeilen aufgeführt. Da es sich um ein Nullsummenspiel handelt werden der Einfachheit halber nur die Auszahlungen von Spieler 2 dargestellt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Es besteht kein Grund für Spieler 2 eine dominierte Zeile zu wählen, wenn er mit einer anderen ein besseres Spielergebnis erreichen kann. Für ihn ist es wichtig, möglichst hohen Nutzen in seiner Zeile zu haben. Er kann diese Strategie außer Acht lassen und sich mit den Vor- und Nachteilen seiner anderen Strategien beschäftigen. Demnach lässt sich die obige Spielmatrix wie folgt reduzieren:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Für den Spaltenspieler, der an minimalen Einträgen interessiert ist, führt man ähnliche Überlegungen an. Betrachtet man die erste und die dritte Spalte, wird deutlich, dass Spieler 1, egal welche Strategie er in der ersten Spalte der verkleinerten Matrix wählt, immer mehr verliert. Somit dominiert die erste die dritte Spalte. Da Spieler 2 sich ohnehin gegen die erste Zeile entscheidet, kann der Spaltenspieler die erste Spalte löschen und es ergibt sich eine weitere verkleinerte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Hier wird die dritte Zeile von der ersten dominiert und kann daher ebenfalls eliminiert werden. Dies ergibt folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Da hier die dritte Spalte die erste dominiert, eliminiert man die erste und erhält die folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist deutlich kleiner als die ursprüngliche und enthält keine dominierten Strategien mehr. $\diamond$

Gelangt man mit Hilfe der Eliminierung dominierter Strategien nicht zu einer zufriedenstellenden Lösung, betrachtet man die Nash-Gleichgewichte.

Wie findet man ein Nash-Gleichgewicht in Normalformspielen? Die Suche nach Nash-Gleichgewichten in Zwei-Personen-Spielen mit jeweils zwei möglichen Strategien ist am einfachsten mit Hilfe von so genannten Abweichungsdiagrammen. Hierzu zeichnet man in die Auszahlungstabelle die besten Erwiderungen mit Hilfe von Pfeilen ein. Die Pfeile deuten jeweils in die Richtung, in die ein Spieler abweichen würde, wenn er wüsste, dass der andere Spieler die dort eingetragene Strategie spielt. Weisen zwei Pfeile in ein Feld, handelt es sich um ein Gleichgewicht.

Beispiel 8.3.

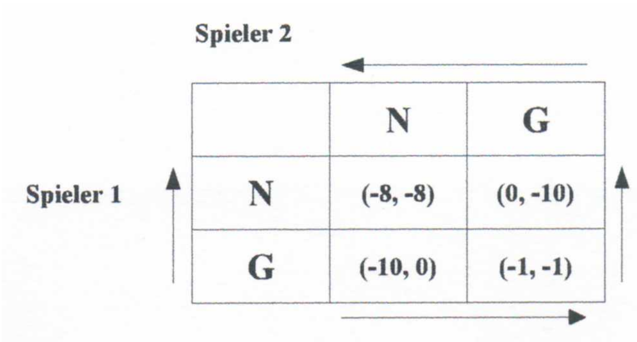


Abbildung 21: Abweichungsdiagramm Gefangenendilemma

Allerdings wird diese Methode in Spielen mit mehr als zwei reinen Strategien pro Spieler unübersichtlich.

In solchen Fällen kann man Nash-Gleichgewichte mit dem folgenden Rezept bestimmen.

Rezept 8.4.

1. Betrachte nacheinander alle Spalten und markiere die beste Erwiderung des Zeilenspielers auf die jeweilige Spalte durch ein Kreuz im entsprechenden Matrixfeld. Kommt die höchste Auszahlung mehrfach vor, existieren mehrere beste Erwiderungen, die alle markiert werden.
2. Betrachte nun nacheinander alle Zeilen und markiere dort die beste Erwiderung des Spaltenspielers auf die jeweilige Zeile durch einen Kringel im betroffenen Matrixfeld.
3. Alle Matrixfelder, die sowohl ein Kreuz als auch einen Kringel aufweisen, sind Gleichgewichte. Treten in der Zeile kein weiterer Kringel und in der Spalte kein weiteres Kreuz auf, handelt es sich um den Fall der strikten Gleichgewichte.

Beispiel 8.5.

Gegeben sei folgende Auszahlungstabelle eines beliebigen Zwei-Personen-Spiels. Jeder der beiden Spieler besitzt zwei mögliche Strategien. Auf die Auszahlungstabelle wurde Rezept 8.4. angewandt.

	K	F
K	(3, 1) + o	(0, 0)
F	(0, 0)	(1, 3) + o

Abbildung 22: Auszahlungsmatrix eines 2×2- Spiels

Es ergeben sich die strikten Gleichgewichte (K, K) und (F, F). $\diamond$

Nach dieser Methode findet man jedoch nur reine Gleichgewichte. Gemischte Gleichgewichte zu finden ist um einiges komplizierter. Man errechnet dazu den Erwartungswert der Auszahlung eines Spielers und vergleicht anschließend die Strategien miteinander. Ebenso errechnet man in Normalformspielen (trembling-hand) perfekte Gleichgewichte.

Beispiel 8.6.

		Spieler B	
		links	rechts
Spieler A	oben	(9,9)	(0,9)
	unten	(9,0)	(1,1)

Abbildung 23: Beispiel (trembling-hand) Perfektheit

Gegeben sei die obere Auszahlungstabelle. Die Gleichgewichte in reinen Strategien lauten (oben,links) und (unten,rechts), wobei (oben,links) ein Gleichgewicht in dominierten Strategien darstellt. (Diese sollten zur Übung noch einmal berechnet werden!) Angenommen Spieler A wählt, bedingt durch einen leichten Tremor, mit Wahrscheinlichkeit ϵ seine Strategie *unten*. Da im Gleichgewicht immer wechselseitig beste Antworten gespielt werden, ist (oben, links) kein perfektes Gleichgewicht. Hierzu prüft man, ob die folgende Ungleichung für die Perfektheit erfüllt ist. Da Spieler A zittert, müssen wir die Auszahlungen von Spieler B gewichten:

$H(oben, links) \geq H(oben, rechts) \Leftrightarrow (1-\epsilon)\cdot 9 + 0 \cdot \epsilon \geq (1-\epsilon)\cdot 9 + 1 \cdot 9$

Für ein immer kleiner werdendes Zittern ($\epsilon \rightarrow 0$) ist die Ungleichung nicht erfüllt. Daher ist (oben, links) kein (trembling-hand) perfektes Gleichgewicht.

Ebenso geht man vor, wenn Spieler B in seiner Strategienwahl zittert.

<u>**Aufgabe:**</u> **Schwarzmarkthändler-Dilemma** (Rieck, 2006, S.49f.)

Zwei Schwarzmarkthändler wollen Waren austauschen. Sie haben über geheime Informationskanäle vereinbart, sich zu einem bestimmten Zeitpunkt Koffer mit den vereinbarten Waren zu übergeben. Beide kennen sich nicht, haben alle Vorkehrungen getroffen, sich bei der Übergabe nicht erkennen zu können und sich im Anschluss an die Übergabe nie wieder zu treffen. Da die Übergabe schnell erfolgen muss, kann der Inhalt des Koffers bei der Übergabe nicht kontrolliert werden. Beiden Händlern ist der Inhalt des Koffers jeweils 100.000 Euro wert. Der Inhalt des jeweils anderen Koffers 400.000 Euro. Der vereinbarte Tausch würde also jedem der beiden 300.000 Euro Gewinn einbringen oder aber 400.000 Euro, wenn einer der Schwarzmarkthändler einfach seinen eigenen Koffer mit Ziegelsteinen füllt.

Bestimmen sie mit Hilfe der Normalformdarstellung dieses Spiels das zugehörige Nash-Gleichgewicht. Was fällt ihnen bei der Interpretation auf?

8.5.3 Material Stammgruppe II: Spiele in Extensivform (Spielbaumdarstellung)

Allgemeine Einführung in die Spieltheorie

Die Spieltheorie ist eine angewandte mathematische Theorie zur Beschreibung strategischer Spiele und wird in der Wissenschaft hauptsächlich der Unternehmensforschung und der Volkswirtschaftslehre zugeordnet. Sie stellt die Methoden zur Verfügung, um Spiele oder spielähnliche Situationen analysieren zu können. Der Spielbegriff ist in diesem Zusammenhang als Metapher zu sehen. Man untersucht in der Regel Situationen, die durch menschliches Verhalten beeinflusst werden. Die Spieltheorie dient zum einen der Analyse von Gesellschaftsspielen und zum anderen zur Lösung von wirtschaftspolitischen oder sozialen Konflikten. Allgemein ist ein Spiel daher eine Interaktion zwischen den beteiligten Personen (**Spieler**). Die Spieler haben zu verschiedenen Zeitpunkten unterschiedliche Möglichkeiten (**Strategien**) innerhalb eines bestimmten Regelwerks (**Spielregeln**) zu handeln, da ansonsten die Entscheidungen nicht näher untersucht werden müssten. Am Ende eines Spiels findet in den meisten Fällen eine Gewinnauszahlung statt, die sowohl positiv als auch negativ ausfallen kann. Das Ziel eines jeden Spielers ist die Maximierung seines Gewinns bzw. die Minimierung seines Verlustes. Da der Gewinn oder Verlust von den Entscheidungen seiner Mitspieler abhängt, ist deren Handeln auch für ihn von Interesse und er versucht es vorherzusehen. Dem einzelnen Spieler geht es dabei lediglich um die Auswirkungen fremder Handlungen auf seine Auszahlungen. Was die anderen Spieler letztendlich verlieren oder gewinnen, ist für ihn nicht von Interesse. Man spricht in diesem Zusammenhang von einem rational handelnden Spieler.

Elemente eines Spiels

Es existiert eine Vielzahl verschiedenartiger Spiele, die mit der Spieltheorie untersucht werden. Um nicht jedes einzelne Spiel explizit analysieren zu müssen und ähnliche Strukturen bereits untersuchter Spiele nutzen zu können, erfolgt eine weitere Kategorisierung nach Merkmalen und deren Varianten.

- **Anzahl der Spieler:**
  - **2** (Schach)
  - **mehr** (Mensch ärgere dich nicht)
- **Anzahl der Spielzüge bis das Spiel beendet ist:**
  - **1** (Münzwurf)
  - **feste Zahl** (Skat)

- **beliebige/variable Zahl** (Schach)

- **Anzahl der Wahlmöglichkeiten pro Spielzug:**
  - **2** (Kopf oder Zahl)
  - **mehr** (Schach)
- **Spielsequenz:**
  - **gleichzeitig** (Schere Stein Papier)
  - **hintereinander** (Schach)
- **Informationsgehalt:**
  - **vollständig** (Schach)
  - **unvollständig** (Poker)
- **Auszahlung:**
  - **Nullsumme** (Schere Stein Papier)
  - **Nichtnullsumme** (Gefangenendilemma)
- **Schicksal:**
  - **zufällige Züge** (Würfelspiel)
  - **keine zufälligen Züge** (Schach)

Bei den Auszahlungen unterscheidet man in der Regel zwischen Nullsumme und Nichtnullsumme. In einem Nullsummenspiel addieren sich Gewinne und Verluste aller Spieler insgesamt auf Null. Bei Nichtnullsummenspielen ist dies nicht der Fall. Die Art der Auszahlung ist dabei nicht auf Geldeinheiten oder Güter beschränkt. Beispielsweise werden die Auszahlungen im Gefangenendilemma in Gefängnisjahren angegeben.

Der Informationsgehalt wird in der obigen Auflistung in vollständige und unvollständige Information gegliedert. Bei Spielen mit vollständiger Information (Schach), sind dem Spieler vor jedem Spielzug alle bis dahin durchgeführten Spielzüge bekannt. Alle gängigen Kartenspiele haben im Gegensatz dazu einen unvollständigen Informationsgehalt, da die Karten der Mitspieler unbekannt sind.

Wir beschäftigen uns hier mit dem Teilgebiet der **nichtkooperativen Spieltheorie**. Hier sind zwischen den Spielern keine bindenden Absprachen und Verträge möglich. Bei den folgenden Spielmodellierungen geht man stets davon aus, dass das

Aufeinandertreffen der gewählten Strategien zu einem Spielergebnis führt, welches anhand der Auszahlungen bewertet wird. Mit der Durchführung des Spiels ist die Interaktion der Spieler somit abgeschlossen. Außerdem nimmt man zur Vereinfachung an, dass der Spielausgang keinen Einfluss auf das Spielverhalten hat, wenn die Spieler erneut aufeinander treffen sollten.

Die Spielbaumdarstellung

In diesem Modell entscheiden sich alle teilnehmenden Spieler gleichzeitig oder nacheinander für eine Strategie. Ziehen beide Spieler laut Spielregeln gleichzeitig, wird dies im Spielbaum durch einen Kreis oder eine Ellipse um die jeweiligen Spielerknoten einer Spielstufe gekennzeichnet.

Der Spielbaum hat eine ähnliche Gestalt, wie wir sie bereits von der Darstellung eines mehrstufigen Zufallsexperimentes kennen. Hier wird die Zugreihenfolge der Spieler explizit aufgeführt und der Spielablauf in einzelne Stufen unterteilt. Ebenso kann genau beschrieben werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit einzelne Züge ausgeführt werden und welche Auszahlungen am Ende zu erwarten sind.
Das bereits bekannte Gefangenendilemma soll nun in mathematischer Form mit Hilfe der Spielbaumdarstellung beschrieben werden.

Die beiden Gefangenen haben die Wahl zwischen den Strategien gestehen (G) und nicht gestehen (N), die Elemente ihrer jeweiligen **Strategienmenge** sind. Stellt man die Spielergebnisse und die entsprechenden Auszahlungen im Spielbaum dar, ergibt sich folgende Abbildung:

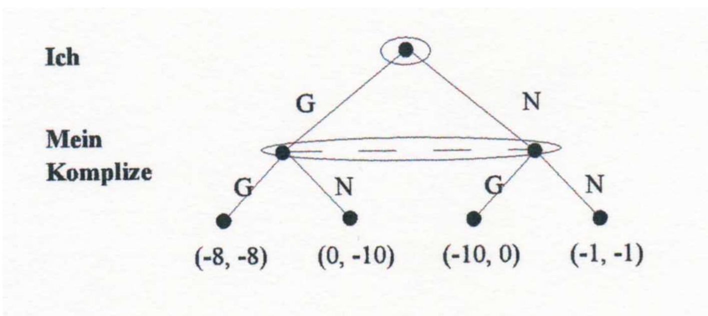


Abbildung 24: Spielbaumdarstellung Gefangenendilemma

Die Gefängnisjahre werden in diesem Fall in negativen Auszahlungen dargestellt. Zuerst ist Spieler 1 am Zug und entscheidet, ob er gesteht oder schweigt. Danach entscheidet sich Spieler 2. Hierbei gilt aber, dass Spieler 2 nicht weiß, wofür sich Spieler 1 entschieden hat.

Ein **Entscheidungsknoten** in einem Spielbaum ist ein Knoten, an dem sich ein Spieler für eine Strategie entscheiden muss. Eine **Informationsmenge** ist eine Menge von Knoten mit den folgenden Eigenschaften:

- an jedem Knoten aus dieser Menge ist derselbe Spieler am Zug
- der Spieler kann zwischen den einzelnen Knoten der Menge nicht unterscheiden, d.h. wenn sich mehrere in der Menge befinden, weiß der Spieler nicht, an welchem Knoten er sich zu der Zeit befindet.
- an jedem Knoten hat der Spieler dieselben Entscheidungsmöglichkeiten.

Die gestrichelte Linie verbindet im Spielbaum stets die Entscheidungsknoten eines Spielers an denen er unvollständig über das Spiel informiert ist. Im Gefangenendilemma werden alle Knoten von Spieler 2 miteinander verbunden. Gleichzeitig wird in dem Oval die Informationsmenge von Spieler 2 veranschaulicht. Besteht ein Spiel nur aus einelementigen Informationsmengen, so ist dies ein Spiel mit vollständiger Information.

Die Spielbaumdarstellung ermöglicht außerdem die Modellierung des Zufalls. Man nennt dies auch Zufallsspieler oder Spieler 0. Hier werden beispielsweise zufällig Karten an die teilnehmenden Spieler verteilt, die den weiteren Spielablauf beeinflussen. Die Realisationswahrscheinlichkeiten des Zufallsspielers müssen zur weiteren Untersuchung angegeben werden. Existieren in einem Spiel mehrere Zufallsknoten, die jedes Mal mit Spieler 0 versehen sind, handelt es sich jeweils um unabhängige Zufallsmechanismen.

Strategien

Die Menge aller möglichen Strategien eines Spielers bezeichnet man als Strategienmenge. Besteht ein Spiel aus mehreren Spielzügen, existieren in der Regel auch mehrere Situationen, in denen sich ein Spieler für eine Aktion entscheiden muss. Im Gefangenendilemma haben beide Spieler jeweils eine Strategienmenge, die aus zwei Elementen besteht.

In diesem einfachen Fall ist eine Strategie der Plan, eine bestimmte Aktion aus der Strategienmenge durchzuführen.

In einem Spiel mit mehreren Zügen bedeutet der Besitz einer Strategie, dass man vor Beginn des Spiels festgelegt hat, wie man in jeder möglichen Spielsituation handelt. Aus mathematischer Sicht ist eine Strategie daher eine Funktion, die jeder Spielsituation ein Element der Strategienmenge zuordnet. Eine Kombination von Strategien, zu der jeder Spieler genau eine seiner Strategien beisteuert, bezeichnet man als **Strategienkonfiguration**. Im Beispiel des Gefangenendilemmas führt jeder Spieler nur einen Spielzug aus: Entweder er gesteht oder er schweigt. Jeder der beiden hat nur zwei Strategien und demzufolge hat der Strategienraum auch zwei Elemente. Eine Strategienkonfiguration (N,G) wäre beispielsweise, wenn der erste N und der zweite G wählen würde.

Bisher haben wir uns, abgesehen vom Zufallsspieler, ausschließlich mit so genannten **reinen Strategien** beschäftigt. Reine Strategien werden immer mit Wahrscheinlichkeit 1 gespielt. Neben den reinen kann man auch **gemischte Strategien** spielen. Gemischte Strategien werden in Abhängigkeit von Zufallsmechanismen wie zum Beispiel dem Werfen einer Münze gespielt. Jeder Spieler bestimmt einen stochastischen Verhaltensplan, der für das gesamte Spiel gilt. Befindet man sich an einem Entscheidungsknoten und lässt man beispielsweise eine Münze oder einen anderen Zufallsmechanismus entscheiden, welche von den zu diesem Zeitpunkt zur Verfügung stehenden Strategien als nächstes ausgespielt werden soll, spielt man eine **Verhaltensstrategie**. Eine Verhaltensstrategie ist somit eine einzelne Zufallswahl an jedem Knoten.

Unterstellt man den Spielern ein perfektes Erinnerungsvermögen, besitzen die Spieler vollständige Information. Die gemischten Strategien und Verhaltensstrategien werden dann als äquivalent angesehen, da sie dieselbe Auszahlung liefern. Unter dieser Annahme werden die Verhaltensstrategien in der Spielbaumdarstellung überwiegend verwendet, da sie in den meisten Fällen deutlich einfacher anzuwenden sind. Eine Besonderheit der Spielbaumdarstellung ist der Begriff des **Teilspiel**s. Ein Teilspiel beginnt in einem Entscheidungsknoten und enthält alle Knoten, die diesem nachfolgen. Allerdings dürfen keine Informationsmengen durch Teilspielbildung zerschnitten werden, da ansonsten die strategische Situation verändert würde. Ist ein Teilspiel kleiner als das Ausgangsspiel, spricht man von einem **echten Teilspiel**.

Lösungskonzepte

Einige Spiele besitzen besondere Eigenschaften, die wir mit Hilfe des Gefangenendilemmas an dieser Stelle genauer betrachten wollen. Der Reiz im Gefangenendilemma besteht darin, dass Entscheidungen, die für den einzelnen vernünftig sind, für die Gruppe keine optimalen oder sogar noch schlechtere Konsequenzen nach sich ziehen.

Angenommen ihr Komplize erfährt aus irgendeinem Grund doch, dass sie gestehen. Dann hat er die Wahl zwischen acht (G) und zehn Jahren Gefängnis (N). Gestehen ist demnach eindeutig die bessere Wahl. Erfährt er, dass sie nicht gestehen, kann er zwischen seiner Freiheit (G) und einem Jahr Gefängnis (N) wählen. Es leuchtet ein, dass auch in diesem Fall ein Geständnis die beste Entscheidung für ihren Komplizen ist. Da die Strafverteilung für sie beide gleich ist, kann die Situation auch von der anderen Seite betrachtet werden. Angenommen sie haben sich beide habt dazu entschieden ein Geständnis abzulegen und ihre Entscheidung wird dem anderen mitgeteilt. Anschließend haben sie noch einmal die Chance getrennt voneinander ihre Entscheidung rückgängig zu machen. Was werden sie tun? Keiner von ihnen kann für sich selbst eine bessere Situation erzwingen, wenn er sich für die andere Alternative (N) entscheidet. Sie werden also beide weiterhin ein Geständnis ablegen.

Eine Strategienkonfiguration, die solch eine stabile Situation beschreibt, bezeichnet man in der Spieltheorie auch als **Nash-Gleichgewicht**.

Das Nash-Gleichgewicht im Gefangenendilemma lautet daher (N,N) bzw. (-8,-8). Gleichgewichte sind Lösungen, die sich dadurch auszeichnen, dass die Spieler ihre Strategienwahl nicht revidieren wollen. Es gibt eine Lösung an, in dem rationales, d.h. vernünftiges Verhalten der Spieler beschrieben wird. Die Definition des Nash-Gleichgewichtes, einer der wichtigsten Begriffe und das meist genutzte Lösungskonzept der Spieltheorie, geht auf den Mathematiker John F. Nash zurück. Ein Nash-Gleichgewicht muss nicht zwingend existieren oder eindeutig sein.

Spiele mit mehrfachen Gleichgewichten können für die einzelnen Spieler unter Umständen problematisch sein, da sie nicht wissen, welche Gleichgewichtsstrategie die anderen wählen. Für den Fall, dass mehrere Gleichgewichte existieren, kann man durch Verfeinerung des Lösungskonzeptes versuchen einige Gleichgewichte auszuschließen. Strengere Anforderungen an die Lösung sollen die Gleichgewichtspunkte ausschließen, die unvernünftig sind. Allerdings bedeutet dies nicht zwangsläufig, dass eine eindeutige Lösung aus der Menge der Gleichgewichte ausgewählt wird.

Aufgrund der im Vergleich zu den Normalformspielen (siehe Gruppe I) verfeinerten Darstellung eines Extensivformspiels sind mehrfache Verfeinerungen des Nash-Gleichgewichtes erst möglich. Man spricht von einem **teilspielperfekten Gleichgewicht**, wenn die Gleichgewichtsstrategie auf jedem Teilspiel ein Nash-Gleichgewicht induziert. Die Strategienkonfiguration (N,N) im Gefangenendilemma ist ein Beispiel für ein teilspielperfektes Gleichgewicht. Die Idee des teilspielperfekten Gleichgewichts ist es, Nash-Gleichgewichte auszuschließen, die durch unplausibles Verhalten außerhalb des Gleichgewichtspfades entstehen. Teilspielperfektheit eines Spiels fordert somit, dass die Gleichgewichtsbedingung nicht nur für das gesamte Spiel, sondern auch für jedes Teilspiel erfüllt ist.

Ein weiteres Refinement, das **(trembling-hand) perfekte Gleichgewicht**, ist eine Strategienkonfiguration, die widerstandsfähig gegenüber kleinen Störungen ist. Die Idee ist, dass die Spieler ihre reinen Strategien nicht mit hundert prozentiger Sicherheit wählen können und mit einer geringen Wahrscheinlichkeit Fehler machen. Hierbei handelt es sich um keine Denkfehler. Man stellt sich in diesem Zusammenhang einen Spieler vor, der mit zitternder Hand den Aufzugsknopf, den er eigentlich drücken wollte, verfehlt und im falschen Stockwerk landet. Gelingt es das Zittern Stück für Stück bis zum völligen Verschwinden zu unterdrücken, erhält man ein perfektes Gleichgewicht. Daher definiert man perfekte Gleichgewichte als Grenzwert von Nash-Gleichgewichten in gestörten Spielen. Die vorgestellten Verfeinerungen der Nash-Gleichgewichte lassen sich folgendermaßen zueinander in Beziehung setzen: Die Menge der (trembling-hand) perfekten Gleichgewichte ist eine Teilmenge der teilspielperfekten Gleichgewichte.

Praktische Lösungsverfahren

Um in einem Baum von einem Knoten aus die verschiedenen möglichen Züge einschätzen zu können, bedient man sich der Rückverfolgung. Dieser Prozess wird auch Rückwärtsinduktion oder Zermelos Algorithmus (siehe Rezept 8.7.) genannt. Hierbei untersucht man den Spielbaum von seinen Endknoten ausgehend. Zunächst sucht man solche, die alle mit demselben Knoten verbunden sind. Da sich ein Spieler stets für die aus seiner Sicht beste Aktion entscheidet, sucht man den Endzustand mit dem besten Ergebnis für den Spieler. Nun führt man dies für alle Endknoten durch und tastet sich somit Ebene für Ebene hoch, bis man schließlich an die Wurzel gelangt und folglich den gesamten Baum analysiert hat.

Wie findet man ein Gleichgewicht in Spielen ohne Zufallszüge?

Im Prinzip kann man jedes extensive Spiel in ein Normalformspiel umschreiben und nach den entsprechenden Gleichgewichten suchen. Vergleiche dazu den entsprechenden Abschnitt von Gruppe I. Handelt es sich dabei um Zwei-Personen-Spiele, ist dies auch die einfachste Methode. Allerdings erweist es sich bei Spielen mit mehr als zwei Personen als günstiger den entsprechenden Spielbaum mit Rezept 8.7. zu untersuchen. Bei der Rückwärtsinduktion prognostiziert man, was in der Zukunft passieren wird und begründet dies rückwärts zurück in die Gegenwart. Zermelo wandte dieselbe Form der Begründung bereits 1912 in der Analyse von Schachspielen an.

Rezept 8.7. Rückwärtsinduktion

Betrachte nacheinander alle Partien (alle Endknoten) und gehe dabei wie folgt vor

1. Färbe die betrachtete Partie rot.
2. Betrachte nacheinander alle Informationsmengen auf dieser Partie. Überprüfe, ob sich derjenige Spieler, dem die betrachtete Informationsmenge gehört, verbessern kann, indem er einen Zug wählt, der nicht auf der betrachteten Partie liegt. Prüfe dazu einzeln
   (a) Wenn der Spieler einen für ihn besseren Spielausgang erzwingen kann, ist diese Partie keine Gleichgewichtspartie. Betrachte die nächste Partie und beginne mit Schritt 1.
   (b) Wenn der Spieler durch die Abweichung einen Endknoten erreichen kann, der ihn besser stellt, färbe alle Züge aller Gegenspieler grün, die zu solchen Endknoten führen.

(c) Wenn der Spieler überhaupt keinen Endknoten erreichen kann, der für ihn besser ist als die rot gefärbte Partie, betrachte die nächsten Informationsmenge auf der Partie und beginne wieder mit 2.

3. Kann an keiner der Informationsmengen einer der Spieler eine Verbesserung durch Abweichung erzielen, ist die rot gefärbte Partie eine Gleichgewichtspartie.

4. Notiere für jeden an der Partie beteiligten Spieler alle Strategien, die ausschließlich rot und keine grün gefärbten Züge enthalten. Dies sind die zur Gleichgewichtspartie führenden Strategien.

5. Durfte ein Spieler auf der Gleichgewichtspartie nie entscheiden, notiere alle seine Strategien.

6. Bilde alle möglichen Strategienvektoren aus den notierten Strategien. Alle auf diese Art gebildeten Vektoren sind Gleichgewichte.

7. Lösche alle Markierungen und beginne mit der nächsten Partie mit Schritt 1.

Beispiel 8.8. Markteintrittsspiel

Gegeben sei ein Zwei-Personen-Spiel, bei dem Unternehmen 2 Monopolist auf einem Markt ist. Ein möglicher Konkurrent, Unternehmen 1, überlegt, ob er in den Markt eintreten soll. Zur Vereinfachung der Spielsituation sei angenommen, dass der Monopolist lediglich zwei Reaktionsmöglichkeiten auf den Markteintritt des Konkurrenten hat. Er kann entweder durch aggressive Preis- oder Werbepolitik aggressiv (A) oder kooperativ (C) reagieren, indem er sich mit ihm den Markt teilt. Dazu sei folgender Spielbaum gegeben:

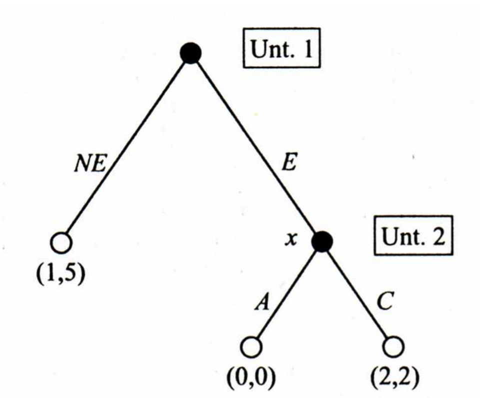


Abbildung 25: Spielbaum des Markteintrittspiels (Berninghaus, 2006, S.108)

Zur Ermittlung des Nash-Gleichgewichtes wendet man Rezept 8.7. an. Der mögliche Konkurrent weiß, dass der Monopolist, wenn er in den Markt eintritt, entweder durch aggressives oder kooperatives Verhalten reagieren kann. Aus der Sicht des Monopolisten ist das kooperative Verhalten optimal. Deshalb antizipiert der mögliche Konkurrent, dass der Monopolist auf einen Markteintritt mit kooperativem Verhalten reagieren wird. Daher ist es für ihn optimal in den Markt einzutreten und die Strategienkonfiguration (E,C) ist das gesuchte Gleichgewicht. ⋄

Man erkennt ein striktes Gleichgewicht daran, dass erstens kein Spieler von der Gleichgewichtspartie abweichen kann, ohne dabei seine Auszahlung zu verändern und zweitens keiner der Spieler von der Gleichgewichtspartie unberührte Informationsbezirke besitzt. Bei einem nicht strikten Gleichgewicht besteht die Möglichkeit, dass die Gewinne manchmal gleich bleiben.

Im Normalfall ist es einfacher teilspielperfekte Gleichgewichte zu finden als normale Nash-Gleichgewichte. Man wendet dazu Rezept 8.7. auf jedes echte Teilspiel an und beginnt möglichst mit weit hinten liegenden. Anschließend arbeitet man sich nach vorn durch.

Handelt es sich um ein nichtdeterministisches Spiel, ein Spiel in dem Zufallszüge vorkommen, müssen die Auszahlungen mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtet werden, um einen Erwartungswert bestimmen zu können. Bei Spielbaumdarstellungen können die Erwartungsauszahlungen an die Endknoten geschrieben und anschließend die Rückwärtsinduktion durchgeführt werden.

Beispiel 8.9. Betrachte folgenden Spielbaum

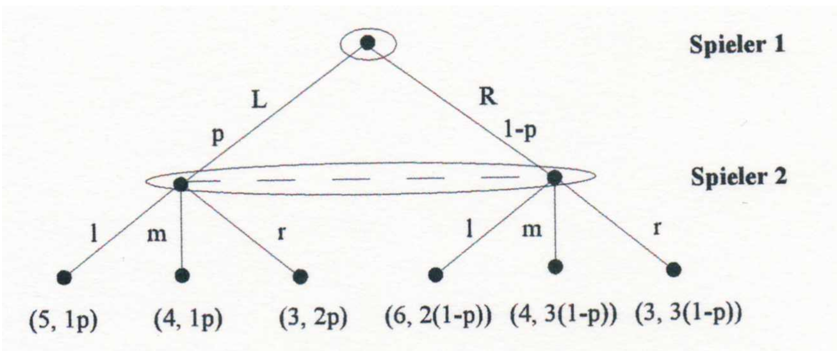


Abbildung 26: Spielbaum nichtdeterministisches Spiel

Man nimmt hier an, dass Spieler 1 mit Wahrscheinlichkeit p seinen Zug L und mit Wahrscheinlichkeit (1-p) seinen Zug R spielt. Dann ist es möglich an die Endknoten die gewichteten Auszahlungen von Spieler 2 zu notieren. Um nun zu bestimmen, bei

welchen Wahrscheinlichkeiten p der Zug r besser ist als m, vergleicht man die Erwartungsauszahlungen der einzelnen Züge miteinander und ermittelt beispielsweise für welche p $H(m) < H(r)$ erfüllt ist. Einsetzen ergibt $1p + 3(1-p) < 2p + 3(1-p) \Leftrightarrow 0 < p$. Das bedeutet nichts anderes als, dass r fast immer besser ist als m.
Bei p = 0 wären die Strategien m und r gleichbedeutend. Der Vergleich $H(l) < H(r)$ ergibt 2<3 und ist demnach immer erfüllt. Der Vergleich der Auszahlungen $H(l) < H(m)$ liefert p<1.

<u>Aufgabe</u> Schwarzmarkthändler-Dilemma (Rieck, 2006, S.49f.)

Zwei Schwarzmarkthändler wollen Waren austauschen. Sie haben über geheime Informationskanäle vereinbart, sich zu einem bestimmten Zeitpunkt Koffer mit den vereinbarten Waren zu übergeben. Beide kennen sich nicht, haben alle Vorkehrungen getroffen, sich bei der Übergabe nicht erkennen zu können und sich im Anschluss an die Übergabe nie wieder zu treffen. Da die Übergabe schnell erfolgen muss, kann der Inhalt des Koffers bei der Übergabe nicht kontrolliert werden. Beiden Händlern ist der Inhalt des Koffers jeweils 100.000 Euro wert. Der Inhalt des jeweils anderen Koffers 400.000 Euro. Der vereinbarte Tausch würde also jedem der beiden 300.000 Euro Gewinn einbringen oder aber 400.000 Euro, wenn einer der Schwarzmarkthändler einfach seinen eigenen Koffer mit Ziegelsteinen füllt.

Bestimmen sie mit Hilfe der Spielbaumdarstellung dieses Spiels das zugehörige Nash-Gleichgewicht. Was fällt ihnen bei der Interpretation auf?

8.5.4 Material Expertengruppenarbeit

Übersetzung der Darstellungsweisen

Es besteht die Möglichkeit beide Darstellungsweisen ineinander überzuführen.

Im Gefangenendilemma sieht die Situation wie folgt aus:

		mein Komplize (Spieler 2)	
		G	N
Ich (Spieler 1)	G	(- 8, -8)	(0, -10)
	N	(-10,0)	(-1,-1)

Abbildung 27: Normalform Gefangenendilemma

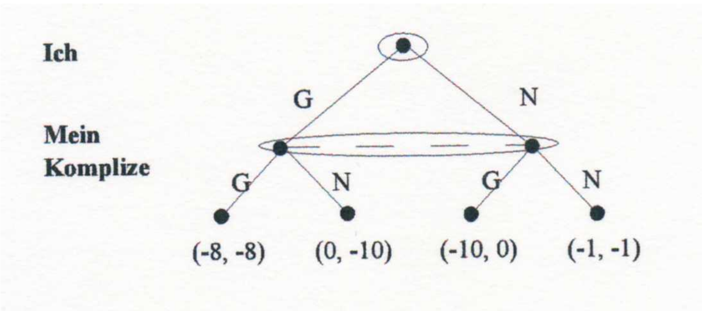


Abbildung 28: Spielbaumdarstellung Gefangenendilemma

Die Übersetzung beider Darstellungsweisen ist in diesem Fall unproblematisch, da es sich um reine Strategien zweier Spieler handelt.

Man verwendet die Normalformdarstellung, um möglichst einfach und verkürzt reine Strategien darzustellen. Aufgrund der Übersichtlichkeit sollte die Anzahl der Spielteilnehmer bei der Wahl dieser Darstellung allerdings nicht zu groß sein, denn die Matrixdarstellung stößt schnell an ihre Grenzen und erfordert eine recht aufwendige Notation für konkrete Spiele. Die Spielbaumdarstellung ermöglicht im Gegensatz dazu die vollständige Darstellung der einzelnen Entscheidungsmöglichkeiten der Spieler und des chronologischen Spielablaufs. Hier kann man sich vorstellen, dass die beteiligten Spieler das Spiel interaktiv spielen, indem sie jeweils auf die Entscheidungen der anderen reagieren, wenn sie am Zug sind. Die Auszahlungstabelle des Normalformspiels kann nicht immer alle Aspekte des vorliegenden Spiels darstellen. Aus dieser Darstellungsweise geht noch nicht einmal hervor, ob es in dem betrachteten Spiel überhaupt mehrere Spielzüge gibt. Eine Normalformdarstellung stellt immer ein Ein-Zug-Spiel dar. In vielen Fällen kann diese Darstellung von großem Nutzen sein, weil dadurch äußerst komplizierte Entscheidungsprobleme auf die wesentlichen Kernentscheidungen reduziert werden können. Von einem Spielbaum ist es stets möglich in eine abstrakte Normalform, die sogenannte induzierte Normalform, zu gelangen. Allerdings vermitteln dann gemischte Gleichgewichte keine direkt ersichtlichen Verhaltensmuster. Es empfiehlt sich, je nach vorliegender Situation zwischen den Darstellungsformen zu wechseln.

Dabei ist nicht ungewöhnlich, wenn verschiedene extensive Spiele die gleiche Normalform besitzen. Kommen Spieler mehrfach und/ oder mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten zum Zuge, besteht bei der Übersetzung in die induzierte Normalform die Möglichkeit des Informationsverlustes. Man verwendet in solchen Fällen eine **Agentennormalform**. Hier werden die einzelnen Züge der Spieler gegenüber gestellt. Ein **Agent** eines Spielers ist eine selbständige Entscheidungseinheit, die genau die gleichen Auszahlungen besitzt wie der jeweilige Spieler, aber nur genau eine seiner Informationsmengen verwaltet. Die Strategienmenge eines Agenten ist die Zugmenge der von ihm verwalteten Informationsmenge.

Die Agenten werden dann so miteinander in Beziehung gesetzt, als handele es sich um einzelne Spieler in der Normalform. In der Agentennormalform zerfällt jeder Spieler in Agenten. Die Strategienmengen dieser Agenten werden einander als Normalformspiel gegenübergestellt (so, als handelte es sich um völlig eigenständige Spieler). An jedem Knoten, an dem der gleiche Spieler handeln muss, entscheiden jeweils unabhängige Agenten des Spielers. Fehler, die den Agenten unterlaufen, passieren daher unabhängig von vorangegangenen Fehlern. Diese Darstellung stellt nun sicher, dass den Spielern keine korrelierten, vereinfacht ausgedrückt aufeinander aufbauenden, Fehler unterlaufen können. Benutzt wird diese Darstellungsform, um (trembling-hand) perfekte Gleichgewichte in der Spielbaumdarstellung zu ermitteln.

8.6 Ausgewählte Aufgaben zur Spieltheorie

Aufgabe 1 „Der seltsame Fall des Lord Strange" (entnommen aus Mehlmann, 1997, S.44ff.) (in der Gruppe zu lösen!)

„Aus unruhigem Schlaf war er im Morgengrauen aufgeschreckt. Fröstelnd trat der letzte Plantagenet vor das königliche Kriegszelt und blickte sorgenvoll feindwärts. Dem erfahrenen Vanguarde-Führer bot sich der in [...] (Abbildung 24) verzeichnete Lageplan dar. Die Armee der Rebellen lagerte in verstörter Halbordnung südwestlich des Sumpfes. Im geziemenden Respektabstand von Tudors rechter Flanke harrten die Heere der Stanleys der kommenden Dinge. Richard betastete gedankenverloren seinen nicht vorhandenen Buckel und legte seine Stirne in kummervolle Falten. Konnte er dem Geschlecht der Stanleys, dieser mit Pfründen und Ehren überhäuften Stütze seines Reiches, letztlich vertrauen? Williams Verrat schien festzustehen. Kam auch seine Ächtung zu spät, so würden seine 3.000 Mann Richards Sache wohl kaum gefährden. Ganz anders stand die Sache mit Lord Stanley, dem Reichsstallgrafen. Wer auf seine Unterstützung zählen konnte, dem gehörte zweifelsfrei der Tag. Richard spielte seinen letzten Trumpf aus. Noch ehe der Vormittag verstrich, schickte er seinen Boten zu Lord Stanley. Die Botschaft war klar und unmißverständlich. Sollte er sich weigern, dem König beizustehen, so würde Lord Strange, des Königs Geisel und des Stanley Sohn, sein Haupt verlieren." (Mehlmann, 1997, S.44f.)

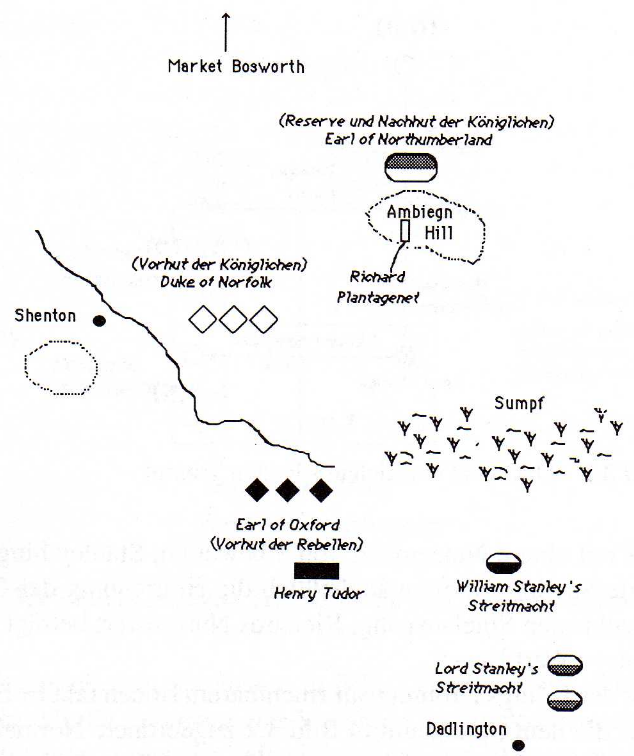


Abbildung 29: Schlacht bei Bosworth (Mehlmann, 1997, S.45)

1. Gehen sie in den weiteren Annahmen von folgender Situation aus: *Stanley bevorzugt den Beistand zu verweigern. Dies aber nur unter der Annahme, dass Richard seine Androhung nicht verwirklicht. Deshalb wird dieser Ausgang aus Stanleys Sicht mit dem Nutzen 0 versehen. Für Richard ist der Ausgang mit Nutzen 0 nur der zweitbeste. Ihm wäre die Unterstützung Stanleys am liebsten, den er mit einem Nutzen von 5 bewertet. Stanley bewertet diese Situation dagegen mit -3. Die Hinrichtung der Geisel bewerten beide Spieler als den schlechtesten Ausgang des Spiels. Richards Nutzen beläuft sich hierbei auf -10 und Stanleys auf -5.*
   (a) Wie sieht der Spielbaum dieser Situation aus? Wie lautet die dazugehörige Normalform?
   (b) Ist die Drohung des Königs wirksam? Wie lauten die Nash-Gleichgewichte? Lässt sich gegebenenfalls ein unplausibles ausschließen?

2. „Stanleys Antwort an Richard war kurz und verächtlich: 'Ich habe noch weitere Söhne!' Mit vermutlich gemischten Gefühlen machte sich der Überbringer einer schlechten Nachricht auf den Rückweg. [...] Auf seinem tollkühnen Ritt über die Redmore-Ebene[30] [...] (geriet) Bote nebst Botschaft in einen Hinterhalt (in Tudors Sold stehender) bretonischer Marodeure [...].“ (Mehlmann, 1997, S. 48)
   (a) Wie sieht die veränderte Spielbaumdarstellung nach diesem Zwischenfall aus?
   (b) Was ändert sich für die Normalform und die Gleichgewichte?
   (c) Ist eine Verfeinerung des Gleichgewichtskonzeptes notwendig?

[30]Unter diesem Namen war das Schlachtfeld bei Bosworth ursprünglich bekannt.

Aufgabe 2 (entnommen aus Binmore, 1992, S.164f.)

Ein außergewöhnlicher Menschenfreund ist bereit eine Universität mit bis zu einer Milliarde \$ auszustatten. Er lädt dazu die Rektoren von Yalebridge und Harford in ein Hotelzimmer ein. Die eine Milliarde \$ trägt er in einem Handkoffer bei sich. Seinen Gästen erklärt er, dass sie ein Spiel spielen sollen, das entscheidet, welche Universität von ihm das Geld bekommt. Der Spielbaum dieses Spiels sieht folgendermaßen aus.

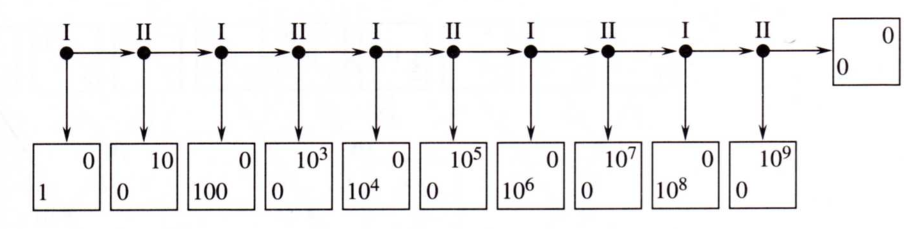


Abbildung 30: Spielbaum Universität

Der erste Zug besteht aus einem Angebot von \$1 des Philantropen an Spieler I (Yalebridge), der dieses Angebot annehmen oder ablehnen kann. Lehnt er ab, bietet der Philantrop Spieler II (Harford) \$10. Nimmt Spieler II das Angebot an, ist das Spiel beendet. Lehnt er ab, werden Spieler I \$100 angeboten usw. Nach jeder ablehnenden Antwort steigt der angebotene Geldbetrag um das zehnfache. Lehnen die Spieler insgesamt neunmal ab, erhält Spieler II die gesamte Billion \$. Lehnt er allerdings am Ende ab, erhält niemand etwas und der Philantrop bringt das Geld zur Bank zurück.

1. Analysieren sie das Spiel mit Hilfe der Rückwärtsinduktion.

   (a) Ist es wahrscheinlich, dass die Rektoren von Yalebridge und Harford sich über die gegenseitige Rationalität im Klaren sind und dass man erwarten könnte, dass sie das teilspielperfekte Gleichgewicht sehen und spielen? Welche Entscheidung würden sie vom Rektor von Yalebridge erwarten, wenn ihm \$100.000 angeboten würden, vorausgesetzt, dass beide alle niedrigeren Angebote abgelehnt haben?

   (b) Wie würden sie dieses Spiel spielen?

Aufgabe 3 (entnommen aus [38])

Zwei Spieler spielen eine Variante des Pokerspiels: 1-card Stud Poker. Der Kartenstapel besteht aus vier Königen und vier Assen. Bevor das Spiel beginnt, muss jeder der beiden 1$ setzen, der in die Mitte des Tisches gelegt wird. Anschließend erhalten beide verdeckt eine Karte vom Stapel, die weder der Spieler selbst noch der Gegner kennen. Nun muss jeder Spieler entweder 2$ setzen oder passen. Beide entscheiden sich gleichzeitig. Damit endet das Spiel. Bietet nur einer der beiden und der andere passt, erhält der Bietende die ganzen Einsätze. Wählen beide die gleiche Aktion, kommt es zum Showdown und beide drehen ihre Karten um. Der Spieler mit der höchsten Karte gewinnt die Einsätze, wobei ein Ass einen König schlägt. Haben beide Spieler im Showdown dieselbe Karte, teilen sie sich das Geld.

1. Entwerfen sie einen Spielbaum für dieses Spiel, der mit einem Zufallszug beginnt und jedem der beiden Spieler eine Karte zuordnet. (Tipp: Der Zufallsspieler besitzt 4 mögliche Züge)
2. Was ist das teilspielperfekte Gleichgewicht? (Sie können dazu auch das Spiel zunächst selbst spielen, um ihre beste Antwort zu finden!)

Aufgabe 4 (entnommen aus [38])

Eine All-Pay-Auction ist eine Auktion, bei der die Bieter den Betrag, den sie bieten, an den Aktionator bezahlen müssen, egal ob sie gewinnen oder nicht. In der folgenden All-Pay-Auction gibt es einen Umschlag mit 1,24 Euro zu gewinnen. Es gibt zwei Spieler. Jeder Spieler kann 50 Cent oder 100 Cent bieten. Der höchste Bieter bekommt den Umschlag. Wenn beide denselben Betrag bieten, wird die Summe im Umschlag geteilt.

1. Angenommen die Auktion wird als first-price, sealed bid auction durchgeführt. Dies bedeutet nicht anderes, als dass die Spieler ihr Gebot gleichzeitig abgeben. Wie sieht dann der Spielbaum aus und was ist das Nash-Gleichgewicht?
2. Wenn die Auktion sequentiell gespielt wird und Spieler 1 vor Spieler 2 bietet, wie sieht dann der Spielbaum aus? Nehmen sie hier an, dass Spieler 2 vor seinem Zug beobachtet, was 1 bietet. Wie lautet das Nash-Gleichgewicht?

Aufgabe 5 (entnommen aus Schlee, S.102)

Von einem Haufen von 5 Streichhölzern müssen zwei Spieler abwechselnd ein oder zwei Streichhölzer wegnehmen. Wer das letzte Streichholz wegnimmt ist Sieger. Geben sie die Spielbaumdarstellung und die Normalformdarstellung des Spiels an! Geben sie ferner eine geeignete Auszahlungsmatrix dieses Spieles an! Welche Strategien sind Nash-Gleichgewichte, perfekte Gleichgewichte und teilspielperfekte Gleichgewichte?

(Hinweis: Undominierte Gleichgewichte sind perfekt. Dominierte Gleichgewichte sind es nicht!)

Aufgabe 6 (entnommen aus Schlee, 2004, S.111)

Wenn ein Versicherungsnehmer (Spieler 1) seiner Versicherungsgesellschaft (Spieler 2) einen Schaden meldet, weiß die Versicherung nicht, ob überhöhte Schadensforderungen gestellt werden. In diesem Sinne betrachte folgendes extensives Spiel. Der Versicherungsnehmer hat die Möglichkeit überhöhte Kosten

$((a+b)[GE], Betrug - B)$ oder echte Kosten $(a[GE], Ehrlichkeit - E)$ in Rechnung zustellen. Die Versicherung kann die geforderten Beträge auszahlen

(Auszahlung-A) oder den Versicherungsnehmer vor Gericht verklagen (Prozess-P), immer in der Ungewissheit wie sich der Versicherungsnehmer tatsächlich verhalten hat. Wir nehmen an , dass vor Gericht die Wahrheit ans Tageslicht kommt. Der vor Gericht Unterlegene muss die Prozesskosten in Höhe von $c[GE]$ bezahlen. Es ist $a, b, c > 0$. Bei der Auszahlung an den Versicherungsnehmer (Spieler 1) soll der tatsächlich erlittene Schaden in Höhe von $a[GE]$, den der Versicherungsnehmer immer erstattet bekommt, abgezogen werden. beim Gerichtsverfahren soll es nur um die zusätzlichen Kosten b gehen.

1. Geben sie die Spielbaumdarstellung dieses Spiels an.
2. Geben sie die dazu gehörige Normalform an.
3. Berechnen sie die Nash-Gleichgewichte dieses Spiels in Abhängigkeit von a,b,c.
4. Empfiehlt eines der Nash-Gleichgewichte dem Versicherungsnehmer aufgrund der Auswahlsituation unehrlich zu sein? Wie hängt diese Empfehlung von den Prozesskosten ab?

Aufgabe 7 (entnommen aus [40])

Der Staat hat ein Interesse daran, dass die Umwelt nicht verschmutzt wird, und entscheidet, dass in Gebrauchtwagen ab sofort eine Abgasreinigung eingebaut werden muss. Die Kosten dafür liegen bei 500 Euro. Eine Überprüfung kostet den Staat 100 Euro. Sollte ein Gebrauchtwagen ohne Abgasreinigung weiterfahren, entsteht ein Schaden an der Umwelt, der sich auf ca.8000 Euro beläuft. Dieser Betrag wird dem Staat angelastet. Sollte aber der Staat einen Autofahrer ohne Abgasreinigung erwischen, muss dieser nachrüsten und die Überprüfung bezahlen. Kosten für ihn: 3400 Euro (Strafe) + 500 Euro (Nachrüstung) + 100 Euro (Überprüfung).

1. Bestimmen sie die Normalform dieses Spiels.
2. Wie sieht das Gleichgewicht aus? Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit eines existiert?

Aufgabe 8 Schere Stein Papier (entnommen aus Mehlmann, 1997, S.)

Im bekannten Kinderspiel Schere-Stein-Papier zeigen zwei Spieler gleichzeitig auf. Die flache Hand ist Symbol für das Papier, die Faust für den Stein und die gespreizten Mittel- und Zeigefinger für die Schere. Folgende Spielregel bestimmt die möglichen Spielausgänge:

Schere schneidet Papier, Papier umwickelt den Stein und Stein schleift die Schere.

1. Wie sieht die zugehörige Normalform dieses Spiels aus? Wie die Spielbaumdarstellung?
2. Was wäre für beide Spieler die beste gemischte Strategie? Wie sollten sie ihre Strategienwahl am besten mischen?

Aufgabe 9 Variation Schere-Stein-Papier (entnommen aus [41])

Der Weihnachtsmann und der Osterhase spielen gern Schere-Stein-Papier. Wer ein Spiel gewinnt, erhält vom Verlierer eine Marzipankartoffel. Allerdings kann der Osterhase mit seinen Pfoten nur Stein und Papier, aber nicht Schere machen. Beide wissen das, reden aber nicht darüber. Der Weihnachtsmann ist also im Vorteil, weil er die Wahl zwischen Stein, Schere und Papier hat. Die Frage ist: Wie groß ist dieser Vorteil? Genauer: Wie viele Marzipankartoffeln macht der Weihnachtsmann im Durchschnitt pro Spiel plus, wenn beide (für sich) optimal spielen?

(Tipp: Fertigen sie zunächst eine Normalform für dieses Spiel an!)

Aufgabe 10 Matching Pennies

Zwei Spieler nennen gleichzeitig Kopf (K) oder Zahl (Z). Stimmen die Angaben der beiden überein, gewinnt Spieler 1 eine Geldeinheit - anderenfalls gewinnt Spieler 2. Prüfen sie ob und wann ein Nash-Gleichgewicht vorliegt. Wie sollten die Spieler also spielen?

(Anmerkung: In den Aufgaben 8 und 9 handelt es sich um ein Optimierungsproblem, dass angibt wie die Spieler ihre Strategien mischen sollen. Hier geht man bei der Argumentation von mehrmaligem Ausspielen aus, wobei der Spielausgang auch hier keinen Einfluss auf die Strategienwahl ausübt)

8.7 Lösungen zu den Aufgaben

Zum Einstieg (Gefangenendilemma) Die Schüler vergleichen im ersten Schritt die einzelnen Strategien untereinander und wägen die Lösungen ab. Die einzige Strategie, in der beide Gefangenen die geringste Strafe erhalten, liegt vor, wenn beide die Tat nicht gestehen. Hier liegt ein Gewissenskonflikt vor, denn auf der einen Seite möchte man in dieser Situation seinen Freund nicht stärker belasten als möglich und auf der anderen Seite möchte man selbst so wenig wie möglich an Strafe verbüßen. Die Frage „Wie würdest du in dieser Situation handeln?“ kann daher auf sehr unterschiedliche Weise beantwortet werden, die allerdings stets individuell zu begründen ist. Des Weiteren ist es in der Diskussion gegebenenfalls notwendig zu verdeutlichen, dass ein Geständnis beider Gefangenen acht Jahre Haft mit sich bringt.

Schwarzmarkthändler-Dilemma

Die Normalformdarstellung des Schwarzmarkthändler-Dilemmas lautet:

		Gangster 2	
		Ware	Ziegel
Gangster 1	Ware	(3,3)	(-1,4)
	Ziegel	(4,-1)	(0,0)

Abbildung 31: Normalform Schwarzmarkthändler-Dilemma (Rieck, 2006, S.48)

Die zugehörige Spielbaumdarstellung des Schwarzmarkt-Dilemmas lautet:

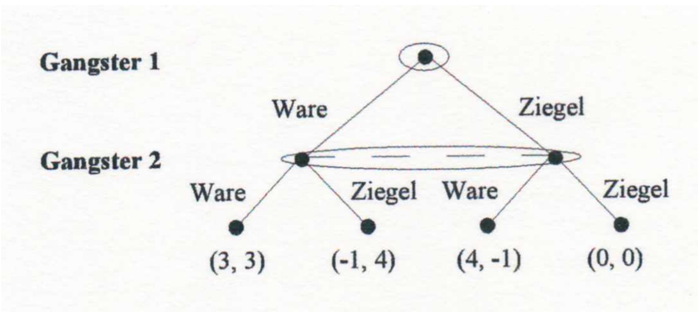


Abbildung 32: Spielbaumdarstellung Schwarzmarkthändler-Dilemma

Sowohl Rückwärtsinduktion als auch das Abweichungsdiagramm ergeben das Nash-Gleichgewicht (Ziegel,Ziegel). Die beiden Gangster müssen demnach Ziegel austauschen, obwohl beide ein großes Interesse an der Zusammenarbeit haben. Selbst wenn es beide als fair betrachten, dem anderen die Ware zu geben, nachdem sie fremde

Ware erhalten haben, ist die Gefahr zu groß hereingelegt zu werden. „Man muss schon vorsorglich den eigenen Koffer mit Steinen füllen. es handelt sich eben um ein echtes Dilemma.“ (Rieck, 2006, S.48)

Aufgabe 1 (in der Gruppe zu lösen)

In dem folgenden Spielbaum werden den drei möglichen Ausgängen die Wertungen aus Sicht beider Spieler zugefügt.

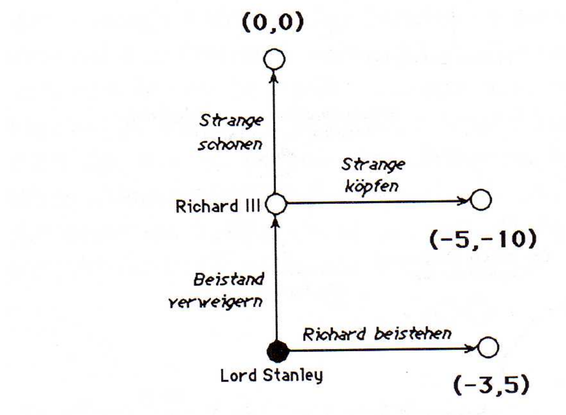


Abbildung 33: Das Spiel um Richards letzten Trumpf (Mehlmann, 1997, S.46)

Die induzierte Normalform wird in der folgenden Abbildung dargestellt.

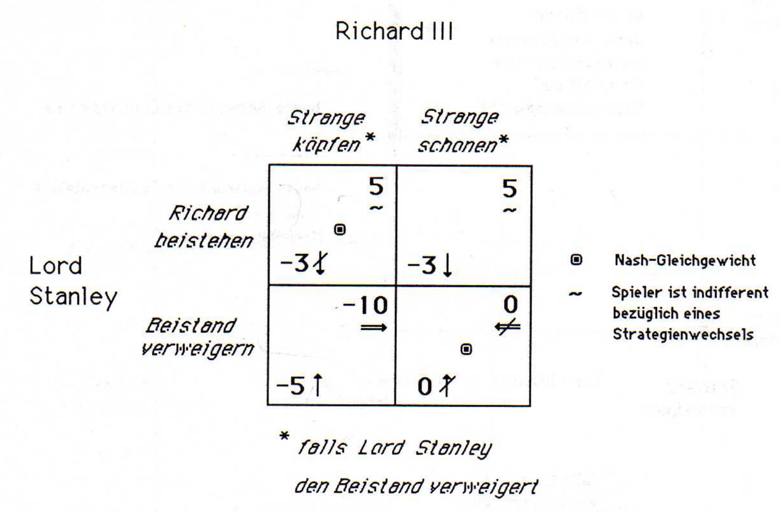


Abbildung 34: Richards letzter Trumpf - Normalform (Mehlmann, 1997, S.47)

Als nächstes stellt sich an dieser Stelle die Frage, ob die Drohung des Königs wirksam ist. In der Normalformdarstellung existieren, wie die eingezeichneten Pfeile des Abweichungsdiagrammes zeigen, zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien bezüglich der Spielausgänge. Im ersten Gleichgewicht gibt Lord Stanley der Drohung von Richard nach. Er entscheidet sich, ihm den geforderten Beistand zu leisten. Das zweite Gleichgewicht beschreibt den verweigernden Lord Stanley und einen König Richard, der trotz fehlgeschlagener Erpressung zögert, seine Drohung zu erfüllen.

Eine Bewertung dieser beiden Gleichgewichte ergibt, dass das erste lediglich durch eine leere Androhung aufrechterhalten wird und daher als glaubhafte Lösungsmöglichkeit ausscheidet.

Die Anwendung der Rückwärtsinduktion im Spielbaum lässt die richtige Vorgehensweise erkennen. Hierbei betrachtet man zunächst das Teilspiel, dessen Wurzelknoten mit Richards einzigem Entscheidungsknoten übereinstimmt. Ist Richard vor die Wahl gestellt seine Androhung war zu machen, bleibt ihm lediglich die zweite Option Strange zu verschonen. Ist allerdings die strikt dominierte Strategie der leeren Drohung des Teilspielbaumes bereits eliminiert, verweigert Lord Stanley im Wurzelknoten des Hauptspieles jeglichen Beistand. Das resultierende Gleichgewicht (Stanley verweigert den Beistand, Richard schont Strange) erfüllt damit als einziges die Eigenschaft der Teilspielperfektheit.

Der Zwischenfall hat sehr interessante Konsequenzen für das Spiel um Richards letzten Trumpf, denn Richard hat aufgrund des Missgeschickes den ersten Zug des Gegenspielers nicht wahrgenommen. Seine Informationsmenge besteht daher aus zwei Entscheidungsknoten, die durch eine gestrichelte Linie verknüpft sind.

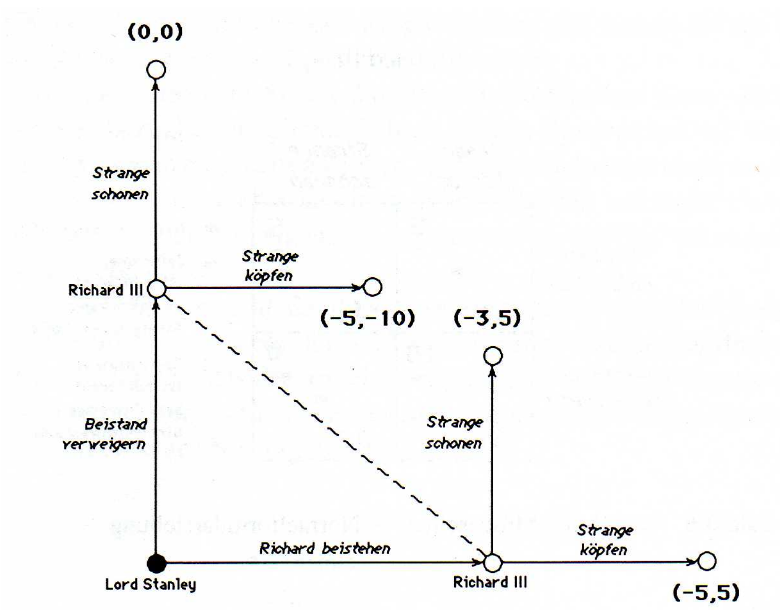


Abbildung 35: Des Boten Missgeschick (Mehlmann, 1997, S.49)

Es liegt daher ein extensives Spiel mit unvollständiger Information vor. Hier müssen alle Knoten, die derselben Informationsmenge des Spielers angehören, über die gleiche Anzahl und Art der weiterführenden Aktionen[31] verfügen. Allerdings können die Spielausgänge, die durch Verwendung identischer Strategien in unterschiedlichen Knoten einer Informationsmenge entstehen, unterschiedlich bewertet werden. Das Enthaupten Stranges wirkt sich folglich nur negativ für Richard aus, wenn Stanley den Beistand verweigert und Richard davon erfahren würde. Allein dann hat Stanley die Wahl sich auf Tudors Seite zu schlagen.

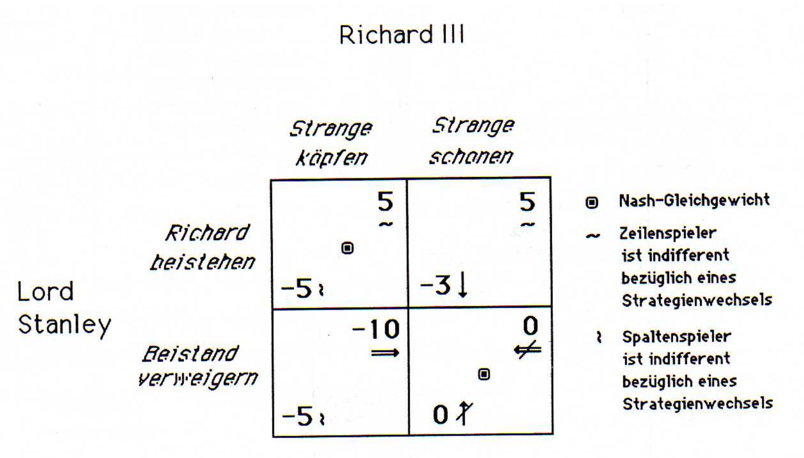


Abbildung 36: Des Boten Missgeschick -Normalform (Mehlmann, 1997, S.50)

Die Normalformdarstellung des Spiels mit unvollkommener Information in der obigen Abbildung zeigt wie im Fall der vollständigen Information die zwei bekannten Gleichgewichte. Das erste besteht aus schwach dominierten Strategien und ist mit Hilfe der Rückwärtsrechnung nicht auszuschließen, da der Spielbaum keinen anderen Teilspielbaum als sich selbst besitzt. Daher sind beide Gleichgewichte teilspielperfekt. Der einzige Ausweg aus diesem Dilemma besteht aus einer weiteren Verfeinerung der Gleichgewichtseigenschaft.

[31] Hier sind es die Strategien *Strange schonen* und *Strange köpfen*.

Dazu betrachte das perturbierte Spiel, dass in der folgenden Abbildung dargestellt wird.

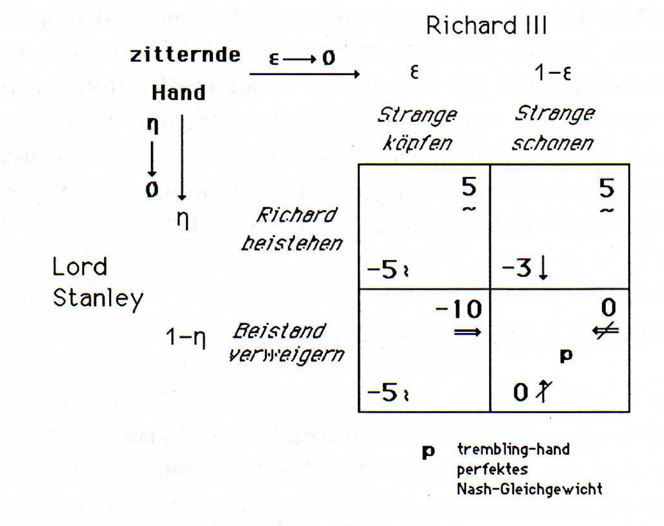


Abbildung 37: Das (trembling-hand) perfekte Gleichgewicht (Mehlmann, 1997, S.51)

Angenommen Richard ist bereit Strange zu schonen und Stanley ist fest dazu entschlossen, seine Hilfe zu verweigern. Was passiert jedoch, wenn dem jeweiligen Gegner ein „Zittern" bei der Auswahl seiner Strategie unterläuft?

Stanleys leichter Tremor führt seine Truppen mit der geringen positiven Wahrscheinlichkeit η auf die Seite Richards. Für jedes $\eta < 1$ ist jedoch stets die beste Antwort auf diese vollständig gemischte Strategie Strange zu schonen. Zittert allerdings Richard, wird Strange mit der geringen Wahrscheinlichkeit ϵ hingerichtet. Für $1 - \eta$ bleibt Stanley dabei den Beistand zu verweigern. In der Abbildung kann man daher ein eindeutiges (trembling-hand) perfektes Nash-Gleichgewicht finden. Vergleiche dazu die wechselseitig besten Antworten. Für Richard ergibt dies $5\eta - 10 \cdot (1-\eta) \leq 5\eta - 0 \cdot (1-\eta) \Leftrightarrow -5\eta \leq 5\eta$ und für $\eta \to 0$ ist die Strategie (Beistand verweigern, Strange schonen) von größerem Nutzen. Ebenso verfährt man mit den Auszahlungen Lord Stanleys und erhält $-5\epsilon - 3 \cdot (1-\epsilon) \leq -5\epsilon + 0 \cdot (1-\epsilon)$ und für $\epsilon \to 0$ $-5 \leq 0$. Somit ist das weitere Nash-Gleichgewicht, dass zu Beginn noch vorhanden war, aufgrund der vewendeten Verfeinerungsregeln ausgeschieden, und es bleibt das (trembling-hand) perfekte Gleichgewicht (Beistand verweigern, Strange schonen) übrig.

(Mehlmann, 1997, S.44ff.)

Aufgabe 2

Die Rückwärtsinduktion ergibt, dass (DDDDD,DDDDD) das einzige teilspielperfekte Gleichgewicht ist. D steht in diesem Zusammenhang für die Ablehnung des Angebotes. In der letzten Runde lehnt Spieler II natürlich nicht ab, weil er dadurch die Milliarde $ erhält, anstelle von nichts. Spieler I erhält durch diesen Zug nichts von dem Geld. Dies ist bedeutend weniger, als wenn er am vorletzten Knoten aussteigt und das Spiel beendet. Folglich beendet er am vorletzten Knoten das Spiel. Damit kennt man die Situation am vorletzten Knoten und setzt die Argumentation kann analog bis zum ersten Knoten fortgesetzt werden. Somit ergibt sich, dass es nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht gibt: Beide Spieler wählen an jedem ihrer Informationsbezirke die Alternative *Angebot ablehnen.*

Es ist unwahrscheinlich, dass sich die Rektoren über die gegenseitige Rationalität im Klaren sind und dass sie das teilspielperfekte Gleichgewicht spielen. Werden dem Rektor von Yalebridge die 100.000$ angeboten, kann es sein, dass er sich unvernünftig verhält und ablehnt.

Aufgabe 3

Im Spiel 1-card Stud Poker hat der Zufallsspieler die folgenden Möglichkeiten beim Verteilen der Karten an Spieler 1 und 2: KK, KA, AK, AA. Er verteilt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{14}$ zwei Könige an beide Spieler, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{7}$ einen König an Spieler 1 und ein Ass an Spieler 2, sowie mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{7}$ ein Ass an Spieler 1 und einen König an Spieler 1, und ebenso mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{14}$ ein Ass an beide Spieler. Die Spieler besitzen die Strategienmengen *mit bieten* (B) oder *passen* (P). Somit ergibt sich folgender Spielbaum

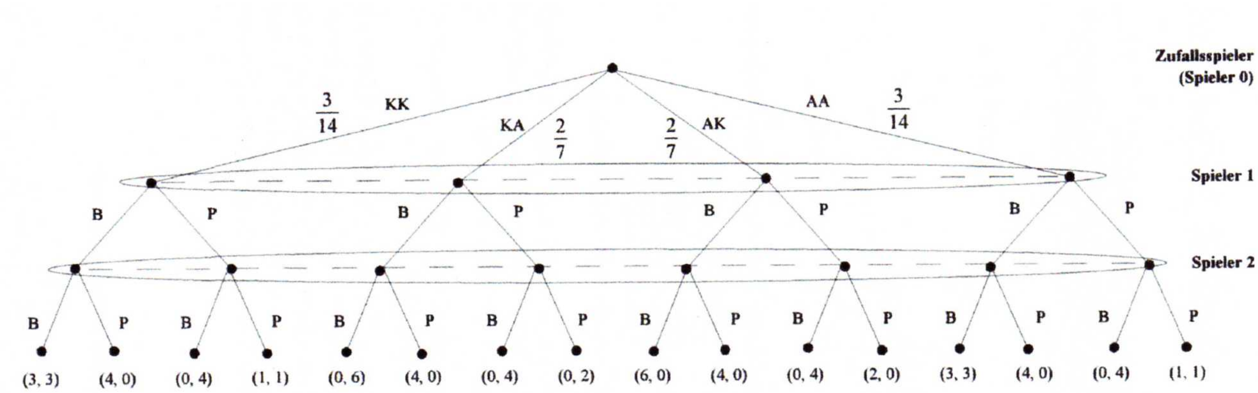


Abbildung 38: Spielbaum 1-card Stud Poker

Das teilspielperfekte Gleichgewicht ermittelt man hier mit Hilfe der Rückwärtsinduktion. Hier ergibt sich, dass, angenommen KK und AA wurden ausgeteilt, jeweils die Strategienkonfiguration (B, B) teilspielperfekte Gleichgewichte sind.

Aufgabe 4

Der Spielbaum der first-price, sealed bid auction lautet:

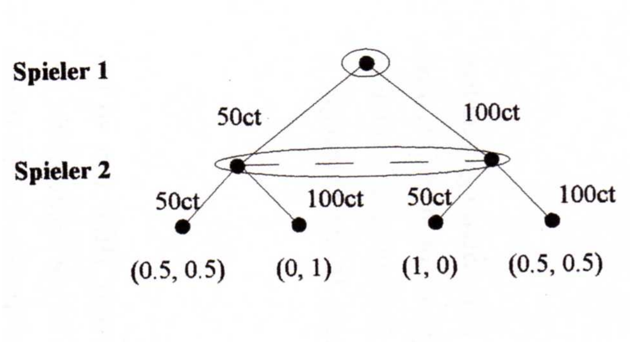


Abbildung 39: Spielbaum first-price, sealed bid auction

Das dazu gehörige Nash-Gleichgewicht ist die Strategienkonfiguration (100ct, 100ct). Dies ist für beide Spieler die einzige Lösung bei der beide Spieler gewinnen können, da sie mindestens 50ct bieten müssen. Wird die Auktion sequentiell gespielt, sieht der Spielbaum wie folgt aus:

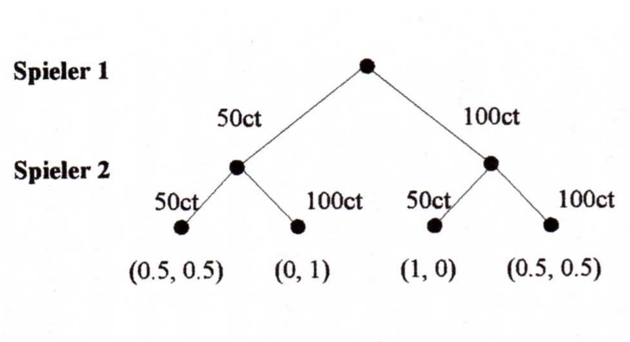


Abbildung 40: Spielbaum der sequentiell gespielten Auktion

Das Nash-Gleichgewicht lautet auch in diesem Fall (100ct, 100ct), da Spieler 1 somit nicht verlieren und mindestens ein Unentschieden erzwingen kann.

Aufgabe 5

Es ergibt sich folgender Spielbaum mit den Auszahlungen 1 für Gewinnen und 0 für Verlieren:

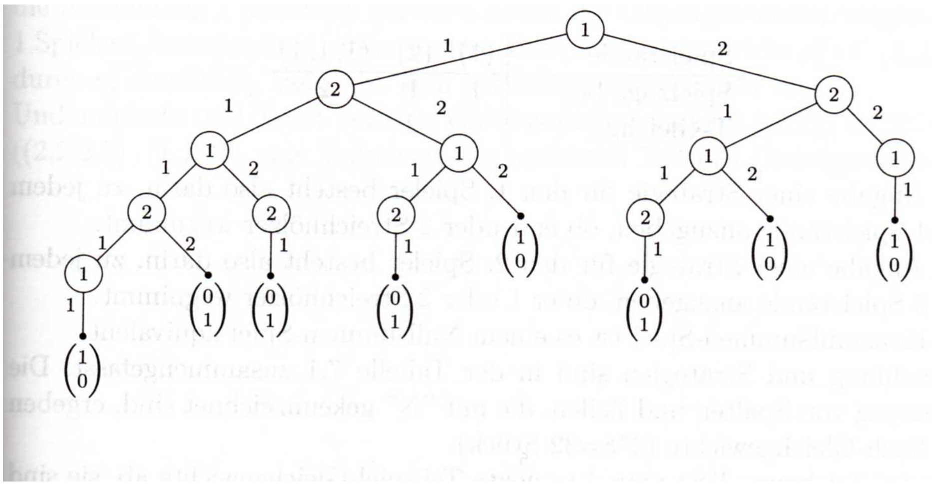


Abbildung 41: 1. Spielbaum Nim Spiel (Schlee, 2004, S.239)

Dieser Spielbaum kann um die Spielstände verkürzt werden, bei denen vor Spielende keine alternativen Spielzüge mehr möglich sind. (Anmerkung: Es muss das letzte Streichholz weggenommen werden!)

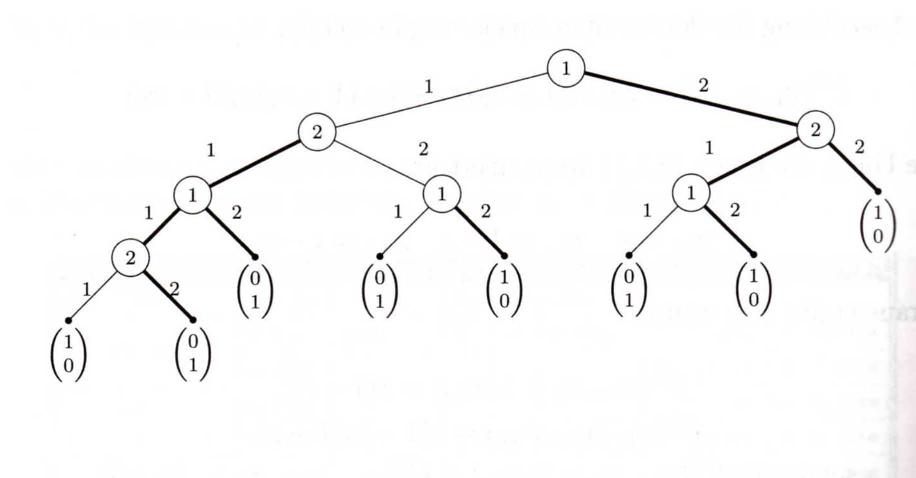


Abbildung 42: 2. Spielbaum Nim Spiel (Schlee, 2004, S.240)

Bei diesem Spiel handelt es sich um ein Nullsummenspiel. Auszahlung und Strategien sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

					N	N	N	N-T	N	N	N-T	N
					1	2	1	1	2	2	1	2
					1	1	2	1	2	1	2	2
					1	1	1	2	1	2	2	2
	1	1	1	1	(1,0)	(0,1)	(1,0)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)
	2	1	1	1	(0,1)	(0,1)	(1,0)	(0,1)	(1,0)	(0,1)	(1,0)	(1,0)
	1	2	1	1	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)
	1	1	2	1	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(0,1)	(1,0)	(1,0)	(0,1)	(1,0)
	1	1	1	2	(1,0)	(0,1)	(1,0)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)
	2	2	1	1	(0,1)	(0,1)	(1,0)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(1,0)	(1,0)
	2	1	2	1	(0,1)	(0,1)	(1,0)	(0,1)	(1,0)	(0,1)	(1,0)	(1,0)
N	2	1	1	2	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)
	1	2	2	1	(0,1)	(1,0)	(0,1)	(0,1)	(1,0)	(1,0)	(0,1)	(1,0)
	1	2	1	2	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)
	1	1	2	2	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(0,1)	(1,0)	(1,0)	(0,1)	(1,0)
	2	2	2	1	(0,1)	(0,1)	(1,0)	(0,1)	(1,0)	(0,1)	(1,0)	(1,0)
N	2	2	1	2	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)
N-T	2	1	2	2	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)
	1	2	2	2	(0,1)	(1,0)	(0,1)	(0,1)	(1,0)	(1,0)	(0,1)	(1,0)
N-T	2	2	2	2	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)

Abbildung 43: Auszahlungstabelle (Schlee, 2004, S.241)

Die Kreuzung von Zeilen und Spalten, die mit N gekennzeichnet sind, ergeben die Nash-Gleichgewichte in diesem Spiel (4*8 = 32 Stück). Aus der Zeichnung liest man 4 teilspielperfekte Gleichgewichte ab. Sie sind zusätzlich mit T gekennzeichnet. Die vier Gleichgewichtsstrategien des ersten Spielers sind undominiert, denn alle Auszahlungen an den ersten Spieler sind gleich 1. Die Auszahlungen an den zweiten Spieler sind hier alle 0.

Beim zweiten Spieler gibt es nur die Strategie $s_4^2 = (1, 2, 2)$, die überall, mit Ausnahme der vier Zeilen der Gleichgewichtsstrategien des ersten Spielers, die Auszahlung 1 liefert. Insbesondere ist das andere Teilspiel-Gleichgewicht $s_7^2 = (1, 2, 2)$ durch s_4^2 dominiert, kann also kein perfektes Gleichgewicht sein. Undominierte und damit perfekte Gleichgewichte sind ((2,1,2,2),(1,1,2)) und ((2,2,2,2),(1,1,2)), eine Teilmenge der teilspielperfekten Gleichgewichte.

Aufgabe 6

1. Der Spielbaum des Versicherungsspiels hat folgende Gestalt:

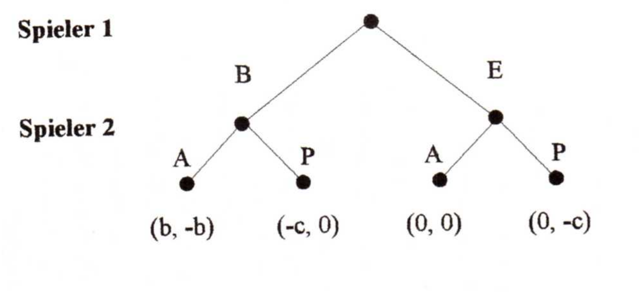


Abbildung 44: Spielbaum Versicherungsbetrug

2. Die Normalform lautet:

		Spieler 2	
		A	P
Spieler 1	B	(b,-b)	(-c,0)
	E	(0,0)	(0,-c)

Abbildung 45: Normalform Versicherungsbetrug

Würde man den tatsächlichen Schaden a mit ins Spiel bringen, so müsste man bei jeder Auszahlung für den ersten Spieler a addieren und beim 2. Spieler abziehen. Dies ergäbe ein äquivalentes Spiel. Für die Strategien würde sich damit nichts ändern.

1. Nach der Auszahlungsmatrix mit reinen Strategien, ergibt sich mit Hilfe eines Abweichungsdiagramms (B, P) als einziges Nash-Gleichgewicht.

2. Da b, $c > 0$ sind, spielt jeder Spieler jede Strategie mit positiver Wahrscheinlichkeit. Demnach auch der Versicherungsnehmer die Betrugsstrategie. Lässt man die Prozesskosten gegen unendlich gehen, dann konvergiert die Wahrscheinlichkeit des Versicherungsnehmers zu betrügen, gegen 1, und die Wahrscheinlichkeit der Versicherung auszuzahlen ebenfalls gegen 1.

Aufgabe 7

Die Normalform der vorliegenden Spielsituation lautet

		Staat	
		Überprüfung	keine Überprüfung
Kfz-Halter	mit Abgasreinigung	(-500, -100)	(-500, 0)
	ohne Abgasreinigung	(-4000, 0)	(0, -8000)

Abbildung 46: Normalform Umweltspiel

Mit Hilfe eines Abweichungsdiagramms ergibt sich, dass in den reinen Strategien kein Nash-Gleichgewicht existiert. Wenn sich die Kfz-Halter für die Abgasreinigung entscheiden, überprüft der Staat nicht und die Kfz-Halter verzichten aufgrund der fehlenden Überprüfung auf die Abgasreinigung. Jetzt lohnt es sich selbstverständlich für den Staat zu überprüfen. Diese Argumentation führt, wie man leicht feststellen kann, im Kreis und führt zu keinem Ergebnis.

Betrachtet man dieses Problem allerdings allgemein unter gemischten Strategien, lässt sich das Problem lösen, da in diesem Fall ein Nash-Gleichgewicht existiert. Man geht davon aus, dass der Staat mit der Wahrscheinlichkeit p überprüft und sich die Kfz-Halter mit Wahrscheinlichkeit q an das neue Gesetz halten. Nun errechnet man den Punkt, an dem die Autofahrer im Mittel die selben Kosten haben, unabhängig davon, ob sie das Gesetz einhalten oder nicht. Entscheiden sie sich für die Abgasreinigung, kostet sie das mit Sicherheit 500 Euro. Entscheiden sie sich dagegen und bauen sie diese nicht ein, müssen sie mit der Wahrscheinlichkeit p davon ausgehen, dass sie 4000 Euro Strafe zahlen müssen. Die Kosten sind also gleich, wenn $500 = 4000p \Leftrightarrow p = \frac{1}{8}$ gilt. Dies entspricht einer Wahrscheinlichkeit von 12,5%. Wenn der Staat jetzt mehr als 12,5% der Autos überprüft, hat der Autofahrer keinen Anreiz das Gesetz zu brechen.

Aufgabe 8 Schere-Stein-Papier

Die Normalform des Schere-Stein-Papier Spiels kann durch eine einfache Tabelle angegeben werden. Die Felder zeigen die Auszahlungswerte für Sieg (1), Unentschieden (0) und Niederlage (-1) aus Sicht des ersten Spielers, dem Zeilenspieler.

		Spaltenspieler		
		Schere	Stein	Papier
Zeilenspieler	Schere	0	-1	1
	Stein	1	0	-1
	Papier	-1	1	0

Abbildung 47: Normalform Schere Stein Papier (Mehlmann, 1997, S.7)

Da es sich um ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel handelt, wird hier nur die Auszahlungstabelle des Zeilenspielers dargestellt. Die Spielbaumdarstellung lautet

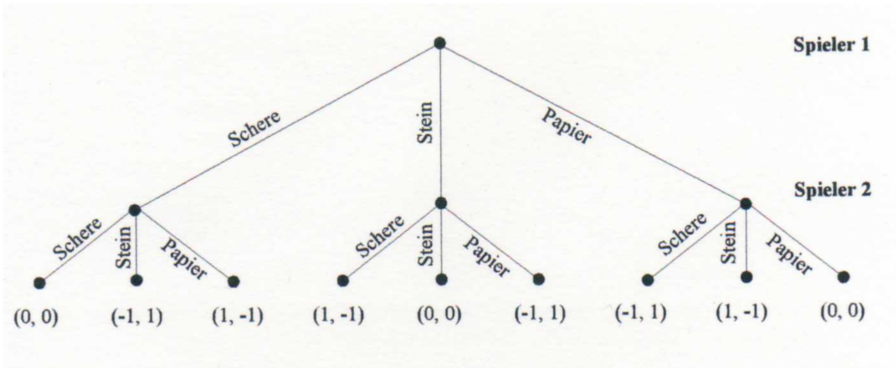


Abbildung 48: Spielbaum Schere Stein Papier

Mehlmann (1997) schlägt folgenden intuitiven Lösungsansatz mit Hilfe der Rückwärtsinduktion vor. Der Zeilenspieler besitzt für jede mögliche Wahl des Spaltenspielers eine eindeutig beste Antwort. Er kann, vorausgesetzt er kennt die Wahl seines Gegners, stets zu seinem Vorteil entscheiden. Folglich ist der Spaltenspielers immer gezwungen seine Wahl geheim zu halten. Zur Verfügung steht ihm lediglich die zufällige Auswahl seiner Aktionen. Angenommen der Spaltenspieler zeigt mit Wahrscheinlichkeit p_1 Schere und mit Wahrscheinlichkeit p_2 Stein. Ist seinem Gegner diese gemischte Strategie bekannt, so würde er Schere, Stein und Papier mit den relativen Häufigkeiten p_1, p_2 und $1 - p_1 - p_2$ auswählen[32].Der Erwartungswert

[32] Mehlmann (1997) fügt hinzu, dass sich dieses Ergebnis nicht mit einmaligem Ausspielen begründen lässt.

ist unter diesen Voraussetzungen sowohl für den Zeilen- als auch für den Spaltenspieler gleich 0. Dies bedeutet, dass alle drei Strategien für beide Spieler gleich gut sind und man erhält für beide eine gemischte Strategie $p^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, die darauf hinaus läuft, dass alle drei Aktionen mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgespielt werden.

Aufgabe 9

Die Normalform dieses Spiels lautet

		Weihnachtsmann		
		Stein	Schere	Papier
Osterhase	Stein	(0,0)	(1, -1)	(-1, 1)
	Papier	(1, -1)	(-1, 1)	(0,0)

Abbildung 49: Normalform Weihnachtsmann und Osterhase

Beide Spieler wollen ihren Gewinn maximieren bzw. ihren Verlust minimieren. Der Ausgang eines Spiels hängt nicht von den bisherigen Spielen ab. Deshalb muss jedes Spiel unabhängig betrachtet werden. Aufgrund der Tatsache, dass es für den Weihnachtsmann unsinnig ist Stein zu spielen, eliminiert man die dominierte Strategie, weil er damit nicht gewinnen kann.

Die Auszahlungsmatrix reduziert sich daher auf

		Weihnachtsmann	
		Schere	Papier
Osterhase	Stein	(1, -1)	(-1, 1)
	Papier	(-1, 1)	(0,0)

Abbildung 50: reduzierte Normalform Weihnachtsmann und Osterhase

Angenommen der Osterhase spielt mit den Wahrscheinlichkeiten p_1 Stein und p_2 Papier. Der Weihnachtsmann spielt Schere und Papier mit den Wahrscheinlichkeiten q_1 und q_2. Dann ist der zu erwartende Gewinn in Marzipankartoffeln für den Weihnachtsmann

$$E_W = -1q_1p_1 + 1q_1p_2 + 1q_2p_1$$

Da es sich um ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel handelt, ist demnach der entsprechende Gewinn für den Osterhasen $E_O = -E_W$. Weil $p_1 + p_2 = q_1 + q_2 = 1$ gilt, eliminiere $q_1$und p_1 und erhalte für den Weihnachtsmann $E_W = -1+2q_2+p_2(2-3q_2)$. Nun unterscheide drei Fälle:

1. $q_2 < \frac{2}{3}$. Dann ist $2 - 3q_2 > 0$ und die beste Strategie des Osterhasen, der den Gewinn des Weihnachtsmannes minimieren will, ist $p_2 = 0$. Er spielt also immer Stein. Der Erwartungswert des Weihnachtsmannes ist nun $E_W = -1 + 2q_2 < \frac{1}{3}$.
2. $q_2 > \frac{2}{3}$. Dann ist $2 - 3q_2 < 0$ und die beste Strategie des Osterhasen ist es immer Papier zu spielen, also $p_2 = 1$.
3. $q_2 = \frac{2}{3}$. Dann ist $2 - 3q_2 = 0$ und somit beläuft sich der Erwartungswert des Weihnachtsmannes, egal welche Strategie der Osterhase hat, auf $\frac{1}{3}$.

Die optimale Strategie für den Weihnachtsmann ist daher mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ Schere und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ Papier zu spielen, weil der zu erwartende Gewinn dann $\frac{1}{3}$ beträgt. Für den Osterhasen ergibt sich, dass es für ihn am besten ist mit $\frac{1}{3}$ Stein und mit $\frac{2}{3}$ Papier zu spielen. Für jede andere Strategie hat der Weihnachstmann eine Gegenstrategie mit der er durchschnittlich $\frac{1}{3}$ Marzipankartoffel gewinnt.

Aufgabe 10 Matching Pennies

Die Auszahlungstabelle des Spiels Matching Pennies lautet:

		Spieler 2	
		K	Z
Spieler 1	K	(1,0)	(0,1)
	Z	(0,1)	(1,0)

Abbildung 51: Normalform Matching Pennies

Mit dem Abweichungsdiagramm findet man kein Gleichgewicht in reinen Strategien. Deshalb betrachtet man nun gemischte Strategien. Ebenso kann man sich vorstellen, dass beide Spieler Zufallsspieler sind, die mit Wahrscheinlichkeiten p_1 bzw. q_1 K und mit Wahrscheinlichkeiten p_2 bzw. q_2 Z wählen. Man überprüft nun, ob beide Strategien des jeweiligen Spielers gleich gut sind. Dazu setze die Erwartungen der einzelnen Strategien beider Spieler gleich. Man erhält für Spieler 1 $p_1 = p_2$ und für

Spieler 2 $q_1 = q_2$. Da $p_1 + p_2 = q_1 + q_2 = 1$ folgt $p_1 = q_1 = p_2 = q_2 = \frac{1}{2}$. Dies bedeutet, dass beide Spieler im Nash-Gleichgewicht beide Seiten der Münze mit gleicher Wahrscheinlichkeit wählen und der erwartete Gewinn $\frac{1}{2}$ beträgt.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassend stellt diese Arbeit die strategischen Spiele der nichtkooperative Spieltheorie im Hinblick auf schulische Anwendung zunächst sehr formal dar. Anschließend wird ein Unterrichtsentwurf für mathematisch orientierte Projekttage oder Mathematik Arbeitsgemeinschaften vorgestellt. Die Spieltheorie hat in meinen Augen eine reelle Chance im schulischen Kontext eingesetzt zu werden. Insbesondere bietet sie interessante Anlässe für die Schüler miteinander ins Gespräch zu kommen und ihre Argumentationsfähigkeit weiter zu schulen. Ich habe bewusst in den meisten Aufgaben den Schwerpunkt gezielt auf das Nash-Gleichgewicht gelegt, um den Schülern eine Diskussionsgrundlage zu bieten, welcher Prozess zu der Gleichgewichtssituation geführt haben könnte. Denn das Nash-Gleichgewicht ist keine Theorie, die den Prozess beschreibt, der zu einem Gleichgewichtszustand führt, sondern sie macht Aussagen über die Eigenschaften von gleichgewichtigen Strategien. Es sei betont, dass aufgrund der Komplexität der Theorie eine für die Schüler anschauliche und verständliche Aufbereitung und Einschränkung der betrachteten spieltheoretischen Elemente erfolgen muss. Sicherlich ist es auch möglich auf diesem Entwurf aufbauend die kooperative Spieltheorie erweiternd und ähnlich aufbereitet hinzuzunehmen. Einzelne Schüler können sich auch in Form von Facharbeiten vertiefend mit dem Thema auseinander setzen. Dies kann sowohl auf rein formaler Ebene als auch auf formaler und deskriptiver Ebene geschehen. Sicherlich ist es nicht nur in der zu Grunde gelegten Lerngruppe möglich nichtkooperative Spieltheorie zu behandeln. Jedoch sollten die jeweiligen individuellen Voraussetzungen einer Lerngruppe im Vorfeld stets kritisch geprüft werden. Des Weiteren besteht in meinen Augen auch die Möglichkeit Spieltheorie in anderen Kontexten im Unterricht einzusetzen. Beispielsweise ist es möglich im Zusammenhang mit Erwartungswerten einen spieltheoretischen Exkurs zu wagen. Bei der Auswahl der hier vorgestellten Aufgaben habe ich versucht Situationen und kleine Geschichten zu schildern, auf deren Grundlage nicht nur die formale, sondern auch eine ergänzende deskriptive Analyse möglich ist. Es findet daher auch eine Interpretation der Ergebnisse statt, die hier mit einer vertieften Auseinandersetzung des Stoffes einhergeht und eine konkrete Berechnung einzelner Elemente voraussetzt. Die konkrete Fragestellung nach Gleichgewichten soll den Schülern die anschließende Interpretation erleichtern. Ich habe außerdem bewusst das Schwarzmarkthändler-Spiel als Variation des Gefangenendilemmas hinzu genommen, in der Hoffnung, den Schülern zu verdeutlichen, dass man Konflikte und Lösungen ähnlicher Situationen klassifizieren kann. Damit ist es möglich die entsprechenden Lösungsstrategien zu entwickeln und mit der Modellierung auch Fragen zu beantworten, die Entscheidungen sozialer Situationen betreffen. Vielleicht denkt aber auch der eine oder andere bei seinem nächsten Spieleabend verstärkt über seine eigenen möglichen Aktionen und die seiner Mitspieler nach, mit dem Ziel ein Gleichgewicht zu finden. Die nächste Pokerrunde oder Schachpartie bietet sicherlich eine Gelegenheit zur Anwendung in zeitlich begrenzten Spielabschnitten.

Literatur

[1] Berlekamp, E.R. / Conway, J.H. / Guy, R.K. (1985). Gewinnen. Strategien für mathematische Spiele. Band 1: Von der Pike auf. Vieweg: Braunschweig.

[2] Berlekamp, E.R. / Conway, J.H. / Guy, R.K. (1985). Gewinnen. Strategien für mathematische Spiele. Band 2: Bäumchen-wechsle-dich.Vieweg: Braunschweig.

[3] Berlekamp, E.R. / Conway, J.H. / Guy, R.K. (1985). Gewinnen. Strategien für mathematische Spiele. Band 3: Fallstudien. Vieweg: Braunschweig.

[4] Berninghaus, S. / Erhardt, K.-H. / Güth, W. (2006). Strategische Spiele - Eine Einführung in die Spieltheorie. (2.Auflage). Springer: Berlin.

[5] Bewersdorff, J. (2003). Logik, Glück und Bluff - Mathematik im Spiel: Methoden, Ergebnisse und Grenzen. (3., überarbeitete Auflage). Vieweg: Wiesbaden.

[6] Binmore, K. (1992). Fun and Games - A Text on Game Theory. Heath: Lexington.

[7] Blomhoj, M. / Kjeldsen, T.H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work - Experiences from an in-service course for upper secondary teachers. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38 (2), 163-177.

[8] Davis, M.D. (1972). Spieltheorie für Nichtmathematiker - mit einem Vorwort von Oskar Morgenstern. Oldenbourg: München.

[9] Dixit, A.K. / Nalebuff, B.J. (1995). Spieltheorie für Einsteiger - Strategisches Know How für Gewinner. Schäffer-Pöschel: Stuttgart.

[10] Dresher, M. (1961). Strategische Spiele - Theorie und Praxis. Verlag Industrielle Organisation: Zürich.

[11] Engel, A. (1998). Problem-Solving Strategies. Springer: New York.

[12] Güth, W. (1992). Spieltheorie und ökonomische (Bei)Spiele. Springer: Berlin.

[13] Holler, M. / Illing, G. (2006). Einführung in die Spieltheorie. (6., überarbeitete Auflage). Springer: Berlin.

[14] Kaiser, G. / Schwarz, B. (2006). Mathematical modelling as bridge between school and university. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38 (2), 196-208.

[15] Karlin, S. (1959). Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics - Volume I. Addison-Wesley: Reading.

[16] Karlin, S. (1959). Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics - Volume II. Addison-Wesley: Reading.

[17] Klaus, G. / Liebscher, H. (1974). Systeme-Informationen-Strategien - Eine Einführung in die kybernetischen Grundgedanken der System- und Regelungstheorie, Informations- und Spieltheorie. VEB Verlag Technik: Berlin.

[18] Leuders, T. (Hrsg.) (2003). Mathematik-Didaktik - Ein Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Cornelsen Scriptor: Berlin.

[19] Luce, R.D. / Raiffa, H. (1964). Games and Decisions - Introduction and critical survey. (4th printing). John Wiley & Sons, Inc.: New York.

[20] Meyer, H. (2003). Unterrichtsmethoden I: Theorieband. (10.Auflage). Cornelsen Scriptor: Berlin.

[21] Meyer, H. (2003). Unterrichtsmethoden II: Praxisband. (10.Auflage). Cornelsen Scriptor: Berlin.

[22] Mehlmann, A. (1997). Wer gewinnt das Spiel? - Spieltheorie in Fabeln und Paradoxa. Vieweg: Wiesbaden.

[23] Ministerium für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen (2004). Kernlehrplan für das Gymnasium-Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen - Mathematik. Ritterbach: Frechen.

[24] Ministerium für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen (1999). Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II-Gymnasium/Gesamtschule - Mathematik. Ritterbach: Frechen.

[25] Pierce, R. / Stacey, K. (2006). Enhancing the image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38 (3), 214-225.

[26] Rauhut, B. / Schmitz, N. / Zachow, E.-W. (1979). Spieltheorie - Eine Einführung in die mathematische Theorie strategischer Spiele. Teubner: Stuttgart.

[27] Rieck, C. (2006). Spieltheorie - Eine Einführung. (6. Auflage). Christian Rieck: Eschborn.

[28] Schwalbe, U. / Walker, P.S. (2001). Zermelo and the early history of game theorie. In: Games and Economic Behaviour 34, 123-137.

[29] Schlee, W. (2004). Einführung in die Spieltheorie. Vieweg: Wiesbaden.

[30] Vorob'ev, N.N. (1977). Game Theory - Lectures for Economists and Systems Scientists. Springer: New York.

[31] Vorbjoff, N.N. (1972). Grundlagen der Spieltheorie und ihre praktische Bedeutung. (2. Auflage). Physica-Verlag: Würzburg.

[32] Worobjow, N. (1975). Entwicklung der Spieltheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin.

[33] http://science.org.at/science/news/142566 - letzter Zugriff am 18.3.2007

[34] http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics - letzter Zugriff am 18.3.2007

[35] http://www.econ.canterbury.ac.nz/personal pages/paul walker/gt/hist.htm - letzter Zugriff am 14.3.2007

[36] http://www.tobiasthelen.de/ipd - letzter Zugriff am 18.3.2007

[37] http://www.soz.unibe.ch/studium/ws0304/download/forschungspraktikum_a_krankenspiel.pdf - letzter Zugriff am 24.4.2007

[38] http://willmann.bwl.uni-kiel.de/~gerald/mikro1-01mikro1p5.pdf - letzter Zugriff am 5.5.2007

[39] http://www.mathematik.de/spudema/spudema_beitraege/kuhlenschmidt/extensivform.htm - letzter Zugriff am 24.4.1007

[40] http://library.thinkquest.org/03oct/02024/html_deu/spiele.htm/03 - letzter Zugriff am 6.5.2007

[41] http://www.mathekalender.de/kalender2004/MathekalenderLoesungen.pdf - letzter Zugriff am 6.5.2007

[42] http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/e-WiMS/index.php?content=default - letzter Zugriff am 15.5.2007

Abbildungsverzeichnis

A Mengen und Funktionen

Dieser Teil des Anhangs dient der Ergänzung der im Text verwendeten Sätze und Definitionen. Dabei handelt sich um eine gekürzte Fassung des Anhangs aus Berninghaus (2006, Anhang B). Es soll als kleines Nachschlagewerk dienen, um einzelne Zusammenhänge zu verdeutlichen. Aus diesem Grund werden auch hier keine Beweise der zitierten Sätze geführt. Die Sätze werden außerdem auch nicht in möglichst allgemeiner Form dargestellt, sondern in der für spieltheoretische Zwecke benötigten Darstellungsweise.

A.1 Mengen

Die typischen spieltheoretischen Beispiele von Mengen sind die so genannten Strategienmengen. Dem naiven Mengenkonzept folgend, fasst man eine Menge als Kollektion ihrer Elemente auf. Die Mengen von gemischten Strategien eines Spielers i bestehen in endlichen Spielen aus $m_i - dimensionalen$ Vektoren. m_i bezeichnet hierbei die Anzahl der Strategien des Spielers i. Für einige Konzepte, die in der Arbeit eingeführt werden, benötigt man einen Vergleich gemäß der Vektorordnung. Setzt man die Kenntnis der Ungleichheitsrelation $\geq$ zwischen reellen Zahlen voraus, soll folgende Konvention gelten:

Gegeben seien zwei Vektoren $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, dann gilt

- $x \geq y \Leftrightarrow \forall i : x_i \geq y_i$
- $x > y \Leftrightarrow \forall i : x_i > y_i$

Konvexe Mengen

Bei der folgenden Betrachtung beschränkt man sich auf konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$.

Definition A.1. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn gilt:

$$x, y \in M \Rightarrow \forall \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda) y \in M.$$

Satz A.2. Gegeben seien zwei konvexe Mengen $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$, dann ist die Menge $M_3 := M_1 \cap M_2$ ebenfalls konvex.

Bei der Definition von spieltheoretischen Konzepten endlicher Mengen, die nicht konvex sind, geht man oftmals auf konvexe Mengen über. Dies geschieht beispielsweise in der Theorie der wiederholten Spiele.

Topologische Konzepte

In diesem Abschnitt wird die Konvergenz von reellen Zahlenfolgen vorausgesetzt.

Definition A.3. Gegeben sei eine Folge von Punkten $(x_k)_k$ im $\mathbb{R}^n$. Dann **konvergiert** $x_k = (x_{1k}, ..., x_{nk})$ gegen einen Punkt $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, wenn für jede Koordinate i gilt

$$x_{ik} \;\; konvergiert\, gegen \;\; x_i$$

Definition A.4. Gegeben sei eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$. Der **Abschluss** von M besteht aus allen Punkten x, für die eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M existiert mit

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n$$

Der Abschluss von M wird mit dem Symbol $\overline{M}$ bezeichnet.

Definition A.5. Eine Menge M heißt **abgeschlossen**, wenn $\overline{M} \subseteq M$ gilt, d.h. also, wenn $\overline{M} = M$ gilt.

Eine Menge ist demnach genau dann abgeschlossen, wenn sie mit ihrem Abschluss zusammenfällt.

Definition A.6. Gegeben sei eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann besteht der **Rand** von M, bezeichnet durch ∂M, aus allen Punkten $x \in M$, für die sowohl Folgen $(x_k)_k$ in M als auch im Komplement M^c von M existieren, die gegen x konvergieren.

Satz A.7. a) Seien $M_1, ..., M_k$ abgeschlossene Mengen in $\mathbb{R}^n$, dann ist die Vereinigung $\bigcup_i M_i$ ebenfalls abgeschlossen.

b) Sei $\{M_i\}_i$ eine Ansammlung abgeschlossener Mengen in $\mathbb{R}^n$, dann ist der Durchschnitt $\bigcap_i M_i$ ebenfalls abgeschlossen.

Satz A.8. Eine abgeschlossene Menge M enthält alle ihre Randpunkte, d.h. $\partial M \subseteq M$.

Definition A.9. Ein Punkt $x \in M$ heißt **innerer Punkt** von M, wenn $x \notin \overline{(M^c)}$. Mit $int(M)$ bezeichnet man die **Menge aller inneren Punkte**, das Innere von M.

Definition A.10. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, wenn gilt $M \subseteq int(M)$.

Ist M offen, dann ist demzufolge $\overline{M} \setminus M = \partial M$.

Satz A.11. Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge, dann ist die Komplementmenge M^c offen (und umgekehrt).

Definition A.12. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, wenn sie in einen abgeschlossenen Quader in $\mathbb{R}^n$ eingeschlossen werden kann.

Definition A.13. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$heißt **kompakt**, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Satz A.14. Gegeben seien zwei Mengen $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^n$, wobei M_1eine beschränkte Menge ist. Dann ist auch die Menge $M_3 := M_1 \cap M_2$ beschränkt.

Satz A.15. Sei M_1 eine kompakte und M_2 eine abgeschlossene Menge von $\mathbb{R}^n$, dann ist die Menge $M := M_1 \cap M_2$ kompakt.

Satz A.16. Gegeben seien kompakte und konvexe Teilmengen $M_1, ..., M_k$ des $\mathbb{R}^n$, dann ist das kartesische Produkt $M_1 \times ... \times M_k$ ebenfalls kompakt und konvex.

Das Resultat dieses Satzes gilt auch, wenn eine der beiden Eigenschaften fehlt. So ist beispielsweise das kartesische Produkt von endlich vielen kompakten Mengen wiederum kompakt.

Satz A.17. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in M eine konvergente Teilfolge hat, die gegen einen Grenzwert in M konvergiert.

A.2 Funktionen

In der Spieltheorie spielen insbesondere reelle Funktionen, die auf $\mathbb{R}^n$definiert sind, eine entscheidende Rolle. Aufgrund dessen erfolgt eine Einschränkung auf Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Der Begriff der Differenzierbarkeit und das Konzept der partiellen Ableitungen wird im nächsten Abschnitt vorausgesetzt.

Konvexe und konkave Funktionen

Definition A.18. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn für zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$gilt:

$$\forall \lambda \in [0,1] : \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Sie heißt **konkav**, wenn für zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\forall \lambda \in [0,1] : \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Gilt außerdem die strikte Ungleichung für $\lambda \in (0, 1)$, spricht man von streng konvexen bzw. konkaven Funktion.

Definition A.19. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **quasi-konkav**, wenn für zwei beliebige Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\forall \lambda \in [1, 0]: \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq min\{f(x), f(y)\}$$

Gilt in der Definition das strikte Ungleichheitszeichen, so nennt man diese Funktion auch streng quasi-konkav.

Satz A.20. Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dann ist f(.) genau dann quasi-konkav, wenn für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge $f_c := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq c\}$ konvex ist.

Dieser Satz liefert eine wichtige Eigenschaft quasi-konkaver Funktionen. Die Mengen f_c nennt man auch Niveaumengen der Funktion f(.). Sie beschreiben die Menge aller Punkte x, auf denen der Funktionswert f(x) größer oder aber gleich dem vorgegebenen Niveau c ist.

Stetige Funktionen

Definition A.21. Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dann heißt f **stetig in x**, wenn für jede gegen x konvergente Folge (x_k) gilt:

$$x_k \to x \Rightarrow f(x_k) \to f(x)$$

f heißt stetig, wenn f in jedem $x \in \mathbb{R}^n$ stetig ist.

Die große Bedeutung stetiger Funktionen für Maximierungsprobleme basiert auf den Aussagen des folgenden Satzes.

Satz A.22. Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und eine kompakte Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$, dann existieren ein x^* und ein $x^{**} \in X$ mit $\forall x \in X : f(x^*) \geq f(x)$

und $\forall x \in X : \quad f(x^{**}) \leq f(x)$. Das bedeutet, dass die Funktion ein Maximum und ein Minimum auf X besitzt.

Satz A.23. Gegeben sei eine kompakte Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dann ist $f(M)$ kompakt.

B Korrespondenzen

Auch dieser Teil des Anhangs dient lediglich einer Veranschaulichung der Zusammenhänge von Korrespondenzen und ist ebenfalls eine verkürzte Fassung des Anhangs in Berninghaus (2006, Anhang C). Nach Berninghaus (2006) beschreiben Korrespondenzen in der Spieltheorie oft Lösungen von Optimierungsproblemen, wobei das Element der Definitionsmenge entweder die Spielgegner oder die äußeren Parameter eines Optimierungsproblems in der ökonomischen Theorie darstellt. An dieser Stelle soll das Konzept der Stetigkeit von Korrespondenzen, dass sich in zwei Komponenten aufteilt, aufgegriffen werden.

Definition B.1. Gegeben sei eine Korrespondenz $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

1. F(.) heißt **oberhalb-halbstetig** in x, wenn für gegebene Folgen $(x_k)_k$ mit $x_k \to x$ und $(y_k)_k$ mit $y_k \in F(x_k)\,\forall k$ und $y_k \to y$gilt: $y \in F(x)$.
2. F(.) heißt **unterhalb-halbstetig** in x, wenn für eine gegebene Folge $(x_k)_k$ mit $x_k \to x$ und ein $y \in F(x)$eine Folge $(y_k)_k$ existiert mit: $y_k \in F(x_k)$ und $y_k \to y$.
3. F(.) heißt **stetig in x**, wenn sie oberhalb- und unterhalb-halbstetig ist. Die Abbildung F(.) heißt **stetig**, wenn sie in allen x stetig ist.

Satz B.2. Eine Korrespondenz $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann oberhalb-stetig, wenn sie einen abgeschlossenen Graphen hat.

Definition B.3, Eine Korrespondenz $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nennt man **konvexwertig**, wenn $F(x)\,\forall x \in \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge ist.

Die Stetigkeitseigenschaft einer Korrespondenz spielt neben ihrer Konvexwertigkeit eine wesentliche Rolle für die Existenz eines Fixpunktes. Anwendung findet dies im Beweis des Existenzsatzes für Nash-Gleichgewichte, der den Kakutanischen Fixpunktsatz benötigt.

Satz B.4. (Kakutani) Gegeben sei eine oberhalb-halbstetige und konvexwertige Korrespondenz F(.) einer konvexen und kompakten Teilmenge M eines endlichdimensionalen Vektorraums in sich selbst mit $F(x) \neq \emptyset \forall x \in M$. Dann hat F(.) einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x^* \in M$ mit der Eigenschaft:

$$x^* \in F(x^*)$$